This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 1708.46

BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
Of Portsmouth, N. H.
(Class of 1842.)

Rec'd 8 Nov. 1871.

Über das Verhältniß

der

Arithmetik zur Geometrie,

insbesondere

über die geometrische Bedeutung

der imaginären Zahlen,

von

(August Christian Wilhelm) Hermann.
H. Scheffler.

Mit 80 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,
Verlag der Hofbuchhandlung von Eduard Leibrock.
1846.

Math 1708.46

1871, Nov. 8.
Sever Fund.

Druck von Fr. Krampe.

Vorrede.

Bei einer gelegentlichen Besprechung mathematischer Gegenstände machte mir der Herr Dr. Schnuse die Mittheilung, der Herr Hofrath Gauß habe auf eine Beziehung aufmerksam gemacht, welche zwischen den imaginären Zahlen von der Form $a+b\sqrt{-1}$ und den in verschiedenen Richtungen Ein und derselben Ebene gemessenen Linien stattfinde, wobei namentlich die in den Faktor $\sqrt{-1}$ multiplizirten Glieder solche Linien darstellen sollten, deren Richtung auf einer für die reellen Glieder angenommenen gegeraden Linie perpendikular stehe.

Diese Mittheilung gewann darum ein großes Interesse für mich, weil ich vermittelst der aus jenen Beziehungen sich ergebenden Begriffe endlich eine klare Vorstellung von der Bedeutung einer gewissen Klasse von Größen zu erlangen hoffte, welche man, abgleich sie durch eine Reihe logischer Schlußfolgerungen aus realen Größen hervorgehen, wegen eines scheinbaren Mangels der charakteristischen Merkmale der wirklichen Größen unter dem gewöhnlichen Sinne des Imaginären in das Bereich der absoluten Unmöglichkeit und der Ungereimtheit verweis't.

Da mir keine Abhandelung des Herrn Hofrath Gauß über diesen Gegenstand bekannt war; so versuchte ich es selbst, die bei einer allgemeineren Auffassung des Begriffes von Größen sich ergebenden inneren Momente, durch welche jene imaginären Größen mit den reellen in einen natür-

lichen Zuſammenhang gebracht und mit denſelben zu einem einzigen großen Ganzen von ſtetig ineinander übergehenden Gliedern verknüpft werden, ſyſtematiſch zu entwickeln. Die nachfolgende Schrift enthält die Reſultate dieſer Unterſuchungen. Ich bin weit davon entfernt, zu glauben, daß der Gegenſtand hierdurch erſchöpft und in einer ſo befriedigenden Weiſe dargeſtellt ſei, wie er es ſicherlich ſein würde, wenn das Genie jenes großen Meiſters der Mathematik, der dazu den Impuls gegeben, denſelben zum Objekte einer literariſchen Bearbeitung gemacht hätte. Da indeſſen auch das Wenige für manchen Freund der Wiſſenſchaft von Intereſſe ſein kann; ſo wage ich es, die kleine Abhandelung dem Publikum zur nachſichtsvollen Beurtheilung zu übergeben.

Hinſichtlich der fragmentariſchen Darſtellung der im erſten Abſchnitte unter dem Titel der Grundbegriffe der Arithmetik aufgeführten Sätze bemerke ich noch, daß es nicht meine Abſicht ſein konnte, in dieſem Abſchnitte ein vollſtändiges Kompendium der Lehren der Arithmetik nach ihrem gewöhnlichen Umfange zu liefern. Derſelbe hätte ganz zeſſiren und ſein Inhalt als bekannt vorausgeſetzt werden können, wenn es mir nicht zweckmäßig geſchienen hätte, die erſten Begriffe und Operationen der Arithmetik, als die Baſis aller ſpäteren Entwickelungen, in einer Weiſe vorzutragen, deren Charakter und Geſichtspunkt ſich den bei den allgemeineren Unterſuchungen der folgenden Abſchnitte beobachteten Methoden prinzipmäßig anſchließt.

Helmſtedt, im September 1845.

H. Scheffler.

Inhaltsverzeichniß.

Erſter Abſchnitt.

Die Grundbegriffe der Arithmetik.

§. Seite

1. 2. Allgemeine Erklärungen 1

3—13. Begriff, Bildung und Darſtellung der poſitiven und negativen ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen 2

Die Operationen der Arithmetik.

14. Addition 20

15. Subtraktion 21

16. Multiplikation 22

17. Diviſion 25

18—20. Potenziirung und Wurzelausziehung 26

21. Imaginäre Zahlen 33

22. Logarithmen 34

23. Der binomiſche Lehrſatz 36

24. Die Exponentialreihe 43

25. Die logarithmiſche Reihe 45

26. Konvergenz und Divergenz der Reihen 47

Zweiter Abſchnitt.

Erweiterung der arithmetiſchen Begriffe.

27. Allgemeine Beſtimmung und Gegenſtand der Arithmetik 48

28. Begriff der Quantität 53

29. Begriff der Stetigkeit 56

30. Begriff der Richtung 59

31—36. Arithmetiſche Darſtellung der nach den verſchiedenen Richtungen einer Ebene gebildeten Linien 62

36. 37. Ausdruck für den Richtungskoeffizienten 74

Die Grundoperationen der Arithmetik im allgemeinſten Sinne.

38. Addition 80

39. Subtraktion 82

40. Multiplikation 83

41. Diviſion 84

43. Potenziirung und Wurzelausziehung 85

Darſtellung aller Zahlen als Summen von zwei Theilen, welche in den Richtungen zweier rechtwinkligen Axen gemeſſen ſind.

44. Vorläufige Darſtellung der Zahlen als Potenzen Ein und derſelben Wurzel a 88

45. Entwickelung der allgemeinen Zahlform $a^{(-)^m \varphi}$ in eine Reihe . . 95

46. 47. Beziehungen, welche zwiſchen den Sinus und Koſinus Ein und desſelben und verſchiedener Winkel ſtattfinden 100

47ᵉ. Werthe der Sinus und Koſinus von imaginären Zahlen 113

Die arithmetischen Operationen an den Zahlen, wenn dieselben mit Hülfe des Richtungskoeffizienten in der Form $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$ dargestellt sind.

§.		Seite
48.	Allgemeine Bemerkungen und Grundsätze über diese Zahlformen	120
49.	Addition und Subtraktion	124
50.	Multiplikation und Division	129
51.	Potenziirung und Wurzelausziehung	132
52.	Allgemeinster Ausdruck für den Logarithmus einer Zahl	133

Nähere Begränzung der Begriffe des Unmöglichen und des Imaginären, und Nachweisung der räumlichen Beziehungen an allen übrigen denkbaren Größen.

53.	Parallele zwischen den geometrischen und arithmetischen Grundbegriffen	136
54—56.	Nähere Bezeichnung der unmöglichen und imaginären Größen	138
57.	Die räumlichen Beziehungen als unveränderliches Merkmal aller übrigen Größen	145
58—64.	Beispiele	147

Dritter Abschnitt.

Anwendung der Theorie der imaginären Zahlen auf die ebene Geometrie.

65.	Allgemeiner arithmetischer Ausdruck für eine begränzte gerade Linie, welche sowol ihrer Länge, wie ihrer Richtung nach betrachtet wird	167
66.	Die Summe der drei inneren Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei rechten oder $= \pi$	169
67.	Die Summe aller inneren Winkel eines n Ecks ist gleich $(n-2)\pi$ und die aller äußern Winkel gleich 2π	174
68.	Abkürzung des Verfahrens bei der Addition und Subtraktion mehrerer Linien	175
70—74.	Das Dreieck	177
75. 76.	Das Viereck	186
77. 78.	Parallellinien	191
79.	Analytische Darstellung eines stetigen linearen Zuges durch Koordinaten	193
80—87.	Koordinatenverwandelung	196
88—91.	Die gerade Linie	210
92—97.	Der Kreis	218
98.	Bestimmung der Länge und der Richtung irgend eines unendlich kleinen Elementes einer gegebenen Kurve	237
99.	Rektifikation irgend eines Kurvenbogens zwischen bestimmten Koordinaten	243
100.	Gleichung der Tangente in einem bestimmten Punkte einer Kurve	244
101.	Gleichung der Normalen in einem bestimmten Punkte einer Kurve	246

Vierter Abschnitt.

Arithmetische Darstellung der verschiedenen Linien im Raume und Anwendung der Resultate auf die Geometrie der drei Dimensionen.

102.	Allgemeine Betrachtungen. — Deklinationskoeffizient	249
103—105.	Der Inklinationskoeffizient	257
106.	Der vollständige Richtungskoeffizient	268
107.	Addition und Subtraktion	273
108.	Multiplikation und Division	275
109.	Potenziirung und Wurzelausziehung	278

Verschiedene Anwendungen auf die Geometrie der drei Dimensionen.

§. Seite

110. Neigung einer Geraden gegen die drei rechtwinkligen Axen und Koordinatenebenen 280
111. Neigungswinkel zweier Geraden gegeneinander 283
112—116. Das sphärische Dreieck 285
117. Analytische Darstellung einer Kurve oder einer Fläche vermittelst Koordinaten 291
118—122. Koordinatenverwandelung 293
123. 124. Die gerade Linie im Raume 311
125—130. Die Ebene im Raume 320
131a. Gleichung einer Umwälzungsfläche 331
132–135. Absolute Länge, Tangente, Normalen und Normalebene einer Kurve im Raume 335
136. 137. Berührungsebene, Tangenten, Normale und Normalebenen einer krummen Fläche 339

Fünfter Abschnitt.

Arithmetische Darstellung der Flächengrößen nach ihrer Quantität und Lage im Raume.

138. Quantität einer Fläche und Flächeneinheit 345
139. Flächeninhalt eines Rechteckes 348
140. Allgemeine Bestimmung des Flächeninhaltes irgend einer gegebenen Figur aus ihrer Begränzung 351
141. Flächeninhalt eines Paralleltrapezes, eines Parallelogrammes und eines Dreieckes 354
142. Flächeninhalt eines Kreises 355
143. Richtung einer ebenen Fläche 356
144. 145. Der Deklinationskoeffizient der Flächen 357
146. 147. Der Inklinationskoeffizient der Flächen 367
148. 149. Darstellung irgend einer ebenen Fläche vermittelst des vollständigen Richtungskoeffizienten 373
150. Die arithmetischen Grundoperationen an den ihrer Größe und Richtung nach dargestellten Flächen 376

Einige Anwendungen der vorstehenden Prinzipien auf die Geometrie der drei Dimensionen.

151. Bestimmung der Größe und Richtung einer ebenen Fläche durch ihre Projektionen 380
152. Bestimmung der Richtung einer Ebene und deren Normalen, wenn die Lage ihrer verschiedenen Punkte durch die Gleichungen des vierten Abschnittes gegeben ist 383
153. Richtung der Berührungsebene und der Normalen an einer krummen Oberfläche 394
154. Flächeninhalt eines begränzten Theiles einer krummen Oberfläche, wenn dieselbe vermittelst rechtwinkliger Koordinaten gegeben ist . . . 395
155. Größe der Kegeloberfläche 399
156. Größe der Zylinderoberfläche 400
157. Größe der Kugeloberfläche 401
158. 159. Bestimmung des Flächeninhaltes der ebenen und krummen Oberflächen, wenn ihre Begränzungen durch Polarkoordinaten gegeben sind 403

Sechster Abschnitt.

Arithmetische Darstellung der Körpervolumen.

§. Seite

160. Quantität eines Körpers und Volumeinheit 411
161 Volum eines rechtwinkligen Parallelepipedums 412
162. Allgemeine Bestimmung des Volums irgend eines Körpers aus seiner Begränzung, wenn dieselbe durch rechtwinklige Koordinaten gegeben ist 414
163. Volum eines prismatischen Körpers 419
164. Volum einer Pyramide 419
165. Volum einer Kugel 421
166. Bestimmung des Volums eines Körpers, wenn dessen Oberfläche durch eine Gleichung zwischen Polarkoordinaten gegeben ist . . 422
167. Begriff der Richtung an den körperlichen Raumgrößen 425

Druckfehler.

Seite 5 Zeile 1 von unten lies stehende statt stehenden.
» 26 » 16 von unten lies Einheit) a) statt Einheit a)
» 31 » 4 von unten lies $\frac{1}{\sqrt[m]{a}}$ statt $\frac{1}{\sqrt[m]{a}}$
» 35 » 5 von oben lies a^{r-} statt a^{r-}
» 60 » 16 von oben lies immer statt nimmer.
» 91 » 2 von oben lies $-\varphi$ statt in φ.
» 96 » 5 von unten lies $a^{\psi\sqrt{-1}}$ statt $a_{\psi}\sqrt{-1}$
» 107 » 9 und 11 von oben lies $\frac{1}{13.15}$ statt $\frac{1}{11.13}$
» 114 » 1 von unten lies $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ statt $\cos^2\varphi + \sin^2 = \varphi 1$
» 181 » 15 von oben versetze das Wort Dreiecken in die letzte Stelle der vorhergehenden Zeile.
» 182 » 10 von unten lies Summe statt Summen.
» 183 » 7 von unten lies Hypotenuse statt Hypotheuse.
» 208 » 4 von oben lies $e^{\varphi_1\sqrt{-1}}\,\mathfrak{D}(\varphi_1 - \psi) = \mathfrak{D}(\varphi_1 - \psi)$. statt $e^{\varphi_1\sqrt{-1}}\,\mathfrak{D}(\varphi_1 - \psi)\,\mathfrak{D} = (\varphi_1 - \psi)$.
» 213 » 7 von oben lies in die Gleichung statt in der Gleichung.
» 221 » 6 von unten lies $\cos\varphi$ statt $\sin\varphi$.
» 225 » 15 von oben lies allgemein statt allgemeine.
» 231 » 4 von unten lies $2a^2\sin^2\alpha$ statt $2^2\alpha\sin^2\alpha$.
» 235 » 2 von unten lies wegen der statt gegen den.
» 244 » 5 von oben ergänze hinter dem Buchstaben φ_1 die Worte: als die untere und x_2 oder φ_2.
» 267 » 8 von unten lies $\cos\psi$ statt $\cos n$.
» 269 » 7 und 13 von unten lies $a\sin\ddot{\alpha}\sin\psi$ statt $a\cos\alpha\sin\psi$.
» 284 » 9 von oben lies ein statt Ein.
» 284 » 23 von oben lies a^2 statt α^2.
» 297 » 7 von unten lies $-\sin\varphi\cos\chi$ statt $-\sin\psi\cos\chi$.
» 301 » 14 von unten lies $\frac{a''b''' - a'''b''}{a'b'' - a''b'}$ statt $-\frac{a''b''' - a'''b''}{a'b'' - a''b'}$
» 310 » 8 von oben lies YZ statt OZ.
» 316 » 2 von oben lies x statt y.
» 326 » 8 von unten lies $g = \text{tang}\,\varphi\cos\chi$ statt $g = \text{tang}\,\varphi\sin\chi$.
» 339 » 1 von oben lies z_1 statt z.
» 376 » 4 von oben lies OX, OX′ statt OY, OX′.
» 391 » 6 von oben lies Q statt P.
» 398 » 2 von oben lies $-F(x)$ statt $-F(\alpha)$

Erſter Abſchnitt.

Die Grundbegriffe der Arithmetik.

§. 1. Allgemeine Erklärungen.

Aus den Wahrnehmungen der Sinnenwelt abſtrahirt der menſchliche Geiſt den Begriff von Größe (Quantum) d. h. von einem Ganzen, welches aus gleichartigen Theilen zuſammengeſetzt iſt. Gleichartig heißen die Theile oder auch die Größen ſelbſt, inſofern man dieſelben nur nach gewiſſen Merkmalen unterſcheidet, welche ihnen ſämmtlich gemein ſind. Neben dieſem allgemeinen Begriffe von der Exiſtenz eines aus Theilen beſtehenden Ganzen ſchöpft der Verſtand durch Vergleichung der Größen mit ihren Theilen den Begriff von Quantität oder von Vielheit der Theile, welche das Ganze bilden, ſowie bei räumlichen Größen den Begriff von Form oder von Anordnung der Theile zu einem Ganzen.

Die Entwickelung der Geſetze, nach welchen die Veränderungen der Größen hinſichtlich ihrer Quantität und Form vor ſich gehen, iſt der Gegenſtand der Mathematik. Dieſelbe wählt hierzu zwei verſchiedene Methoden: entweder bringt ſie die Beziehungen, in welchen die Größen zueinander ſtehen, in abſtrakte Begriffe, indem ſie dieſelben dem Geiſte durch den ungetheilten Akt des Denkvermögens vergegenwärtigt — es iſt Dies das Geſchäft der Arithmetik — oder ſie ſtellt jene Beziehungen bildlich dar, indem ſie dieſelben dem Geiſte mit Hülfe des ſinnlichen Anſchauungsvermögens vorführt — es iſt Dies die Aufgabe der Geometrie.

§. 2. Diskrete und ſtetige Größen. Aliquoter und aliquanter Theil.

Die Größen ſind in ihrer Quantität nach entweder *diskret* oder *ſtetig*. *Diskret* heißt eine Größe, wenn ſie aus lauter *einfachen* Theilen beſteht, welche keine weitere Verkleinerung oder Zerlegung zulaſſen, oder welche ſo gedacht werden, daß eine Verkleinerung derſelben dem Begriffe ihrer Exiſtenz widerſpräche; ſo iſt z. B. die Menge von Verſetzungen, welche ſich aus den Elementen a, b, c bilden laſſen, und deren einzelne Theile die Komplexionen abc, acb, bac, bca, cab, cba ſind, welche nur ihrer Anzahl nach betrachtet werden, eine diskrete Größe. *Stetig* hingegen heißt eine Größe, von welcher kein Theil der kleinſte iſt, und ein jeder beliebig ausgewählte Theil noch ferner getheilt werden kann; Dies iſt der Fall mit der Länge einer Linie, deren Theile ohne Ende theilbar gedacht werden können.

Wenn eine Größe in eine gewiſſe Anzahl *gleicher* Theile getheilt gedacht wird; ſo bildet ſie ein *Vielfaches* eines ſolchen Theiles, und der Theil ſelbſt heißt ein *aliquoter* Theil der Größe. Ein Theil jedoch, welcher durch mehrmaliges Setzen die Größe nicht erzeugen kann, heißt ein *aliquanter* Theil derſelben.

§. 3. Begriff der Zahl.

Einen vollſtändigen Begriff von der Quantität verſchiedener Größen erhalten wir erſt durch die Vergleichung derſelben mit einer anderen gleichartigen Größe, deren Quantität als bekannt vorausgeſetzt wird. Der Akt der Vergleichung irgend einer Größe mit einer anderen in quantitativer Beziehung heißt das *Meſſen* der erſteren durch die letztere, und die letztere Größe ſelbſt, welche zum Ausgangspunkte der Meſſung dient, heißt die *Einheit* der zu meſſenden Größe. Der abſtrakte Begriff, welcher aus dieſer Meſſung einer Größe durch ihre Einheit entſpringt, oder der Ausdruck für das *Verhältniß*, in welchem jene Größe zu ihrer Einheit ſteht, wird dargeſtellt durch die *Zahl*. Die Zahl repräſentirt demnach das *Geſetz*, nach welchem eine Größe aus ihrer Einheit entſpringt.

Die Einheit, durch welche eine Größe gemeſſen werden ſoll, muß offenbar mit derſelben gleichartig ſein, und iſt demnach für

verſchiedenartige Größen verſchieden. Der abſtrakte Begriff des Verhältniſſes einer Größe zu ihrer Einheit iſt dagegen von der beſonderen Art der Größe ganz unabhängig und allen Größen gemein, inſofern ihnen ſämmtlich das Attribut der Quantität gemein iſt, welches durch die Zahl zur vollſtändigen Erkenntniß gebracht werden ſoll. Die Einheit nun, aus welchen die Zahlen ebenſo gebildet werden, wie die Größen aus den ihnen entſprechenden Einheiten, heißt Eins.

§. 4. Zahlenbildung.

Es iſt jetzt zu zeigen, wie die Zahlen entſtehen, durch welche alle quantitativen Verhältniſſe der verſchiedenen Größen zu ihren Einheiten ausgedrückt werden können.

Setzen wir zuerſt die Einheit als Ganzes, und fügen dann zu derſelben ſukzeſſive Eine ihr gleiche Einheit nach der anderen hinzu; ſo erhalten wir eine Reihe von Vielfachen der Einheit oder von Größen, von denen ſich die nächſtfolgende aus der vorhergehenden immer nach demſelben Geſetze bildet, und deren quantitative Werthverhältniſſe zur Einheit durch die Reihe der ganzen Zahlen

1 2 3 4 5 6 . . . . ⟶

ſchematiſch dargeſtellt werden. Dieſe Reihe ſetzt ſich vermöge des ihr innewohnenden Bildungsgeſetzes nach der oberen Seite ins Unendliche fort, und hat nach dieſer Seite hin keine Gränze.

Der Begriff von Fortbildung der immer höheren Glieder einer Reihe nach einem beſtimmten Geſetze aus den niedrigeren Gliedern, ein Begriff, welcher dem menſchlichen Geiſte erſt aus der Beobachtung der verſchiedenen Entwickelungsſtufen in der Sinnenwelt, namentlich durch die Anſchauung der ſtetigen räumlichen Verhältniſſe erwachſen iſt, bedingt nothwendig den Begriff der Rückbildung dieſer Reihe nach einem analogen Geſetze, in Folge deſſen aus den höheren Gliedern die niedrigeren allmählig entſtehen, ſodaß man mit Hülfe desſelben in den Stand geſetzt wird, nachdem irgend ein beliebiges Glied der Reihe gegeben iſt, von dieſem ausgehend, die niedrigern ſukzeſſive zu erzeugen. Dieſes Geſetz der Rückbildung charakteriſirt ſich dadurch, daß dasſelbe, auf ein jedes beliebige Glied

der Reihe angewandt, dasjenige vorhergehende Glied erzeugt, aus welchem durch Anwendung des Fortbildungsgesetzes das erstere Glied entstehen mußte; jenes Gesetz der Rückbildung der obigen Zahlenreihe besteht demnach in der allmähligen Hinwegnahme Einer Einheit nach der anderen. Begänne man demzufolge z. B. bei dem Gliede 5, um rückwärts aus demselben die niedrigeren Glieder zu erzeugen; so würde man die Reihe

$$\leftarrow \ldots 1\ 2\ 3\ 4\ 5$$

erhalten.

Nachdem man auf diese Weise zum Gliede 1 oder zu der ursprünglich gesetzten Einheit gelangt ist, stellt sich der formellen Weiterbildung der Reihe in der der früheren entgegengesetzten Richtung eine Schranke entgegen, welche zwingt die Operation abzubrechen, weil wir mit dem Werthe derjenigen Glieder, welche sich bei einer fortgesetzten Anwendung des Gesetzes erzeugen würden, keine Vorstellung verbinden können, die eine Beziehung jener Glieder zu der Einheit in bloß quantitativer Rücksicht begreiflich machte. Darum ist jedoch das Bildungsgesetz noch nicht vernichtet und der Begriff aufgehoben, nach welchem dieses Gesetz auf die Fortbildung einer gegebenen Reihe ins Unendliche Anwendung finden muß. Dieser Umstand nöthigt uns, zu dem reinen Begriffe des quantitativen Verhältnisses irgend einer Größe zu einer anderen, nämlich hier zu der angenommenen Einheit, noch die Vorstellung der allmähligen Entstehung oder Bildung der ersteren aus der letzteren durch sukzessives und gesetzmäßiges Fortschreiten in einem bestimmter Sinne oder in einer bestimmten Richtung zu fügen, und Figuren zu betrachten, welche einer Umkehrung der Richtung dieses Gesetzes ihre Entstehung verdanken, denen zwar, wenn sie absolut und ohne Beziehung zu den anderen Gliedern der Reihe gedacht werden sollen, der Mangel einer leeren Imagination anhaftet, welche aber doch den Stempel derselben Gesetzmäßigkeit der Entstehung tragen, wie die absolut denkbaren Glieder derselben Reihe, und demnach, wenn sie mit den letzteren unter solchen Voraussetzungen in Verbindung gebracht werden, daß sie durch das an ihnen beurkundete Bildungsprinzig die Regel zu einer mit jenen vorzunehmenden Operation herleihen sollen, wol zu einem vernünftigen Resultate führen können. So

leuchtet z. B. ein, daß dasſelbe Reſultat erhalten werden muß, ob man zu einer gegebenen Zahl erſt eine gewiſſe Menge von Einheiten hinzu- und darauf eine gewiſſe Menge von Einheiten wieder abzählt, oder ob man erſt die letztere Menge von Einheiten ab- und darauf die erſtere Menge von Einheiten hinzuzählt. Zählt man nun zur Zahl 2 erſt 4 Einheiten hinzu; ſo entſteht die Zahl 6: zählt man hiervon wiederum 3 Einheiten ab; ſo ergibt ſich die Zahl 3. Dasſelbe Reſultat müßte offenbar erhalten werden, wenn man von der Zahl 2 erſt die 3 Einheiten ab- und darauf die 4 Einheiten hinzuzählen wollte. Das Abzählen der 3 Einheiten von der Zahl 2, welches in der Wirklichkeit unausführbar iſt, würde nun zu einer ſolchen eingebildeten Zahl führen, mit der man zwar an und für ſich keinen Begriff verbinden könnte, welche ſich aber dadurch charakteriſiren müßte, daß wenn man begänne, allmählig Eine Einheit nach der anderen wieder zu ihr zu fügen, die innere Weſenloſigkeit ebenſo allmählig dem Uebergange in das Bereich der Wirklichkeit entgegenführt und zuletzt wieder ganz aufgehoben würde, ſodaß ſich durch ein 3maliges Hinzufügen Einer Einheit nach der anderen wieder die wirkliche Zahl 2 herausſtellte.

§. 5. Begriff der Null.

Bringt man nun unter dieſem Geſichtspunkte das Bildungsgeſetz der obigen rückwärtsſchreitenden Reihe ferner in Anwendung; ſo wird man durch die nochmalige Hinwegnahme Einer Einheit von der nur noch vorhandenen Einheit auf den Begriff des Nichts oder, als Zahlwerth, zu der Null geführt, welche zwar zu keiner gegebenen Zahl in einem quantitativen Verhältniſſe ſteht, weil ſie nicht als ein Theil derſelben angeſehen und demnach nicht mit ihr verglichen werden kann, welche aber doch den Ausgangspunkt oder das erſte Glied bezeichnet von welchem die Zahlenreihe anhebt, und aus welchem dieſe Reihe durch ſtetige Anwendung desſelben Bildungsgeſetzes erzeugt wird.

§. 6. Negative Zahlen.

Setzen wir jetzt die in Rede ſtehende retrograde Reihe der

ganzen Zahlen nach dem fraglichen Gesetze unterhalb des Gliedes 0 weiter fort; so werden alle folgenden Glieder nur fingirte Werthe erhalten, denen nur das Merkmal eigen ist, daß sie gesetzmäßig gebildete Glieder derselben Reihe sind, und deren Beziehung zu einander und zu den Gliedern der vorwärtsschreitenden Reihe darin besteht, daß sie sich vorwärts (nach unten) gerade so bilden, wie die Glieder des oberen Theiles der Reihe rückwärts, und umgekehrt, daß sie rückwärts (der 0 entgegen) ebenso aus einander erhalten werden, wie die letzteren Glieder sich vorwäts aus einander bilden. Das quantitative Verhältniß jener fingirten Glieder zu einander ist demnach dasselbe, wie das der reellen Glieder. Man bezeichnet sie daher durch dieselben Zahlzeichen, indem man ihnen das Zeichen — (minus) vorsetzt. Außerdem werden sie *negative* Zahlen genannt, während die ersteren zum Gegensatze zu diesen *positive* Zahlen heißen und durch das Zeichen + (plus) von denselben unterschieden werden, wenn es darauf ankommt, den Gegensatz zwischen beiden recht anschaulich hervorzuheben. Hiernach stellt sich die nach beiden Seiten unbegränzte Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen durch das Schema

$$\longleftarrow \ldots. -6 -5 -4 -3 -2 -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \ldots. \longrightarrow$$

dar.

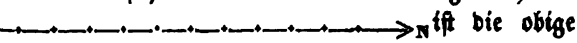
Die Größe —1 heißt auch die *negative Einheit*, weil sich aus derselben die negativen Zahlen gerade so bilden, wie die positiven Zahlen aus der positiven Einheit erhalten werden, und man kann sagen, daß die negative Einheit aus der positiven, sowie eine jede andere negative Zahl aus der mit ihr korrespondirenden positiven Zahl durch einfache Umkehrung des Bildungsgesetzes oder des Zeichens erhalten werde.

§. 7. Sinnliche Bilder für die obige Zahlenreihe.

Legt man der Eins, als Einheit der abstrakten Zahlen, die Bedeutung irgend einer wirklichen Größe, z. B. die einer Zeitsekunde unter; so ist das sinnliche Bild der vorstehenden Reihe die verschiedenen nach Sekunden gemessenen Zeitabschnitte der unendlichen Zeit, wenn man unter einem Zeitabschnitte durchaus

nur einen ſolchen Zeitraum verſtanden wiſſen will, welcher von dem gegenwärtigen oder irgend einem anderen Augenblicke aus vorwärts, alſo in der Zukunft liegt. Die Zeiträume der Vergangenheit tragen alsdann zu denen der Zukunft dasſelbe eingebildete Verhältniß, wie die negativen Zahlen zu den poſitiven. Die 0 ſtellt den Augenblick dar, von welchem aus die Zeit gerechnet wird, indem ſie, ebenſo wie dieſer Augenblick, keine wirkliche Zeitgröße, ſondern nur den Gränzpunkt, von welchem aus die Zeit gerechnet wird, bezeichnet.

Stellt man ſich unter der Eins eine Längeneinheit vor; ſo



iſt die obige Reihe die Repräſentantin für die verſchiedenen Längen einer etwa in der Richtung der Mittagslinie ins Unendliche ſich erſtreckenden geraden Linie, wenn die Längen ſämmtlich von einem gegebenen Punkte dieſer Linie aus von Süden gegen Norden gemeſſen werden ſollen. Die von dieſem Punkte aus von Norden gegen Süden liegenden Längen werden alsdann durch die negativen Zahlen dargeſtellt. Zu der Länge 2 vier Einheiten hinzufügen, heißt alsdann, von dem mit 2 bezeichneten Punkte der obigen Figur in der Richtung ON bis zum Punkte 6 vorwärtsſchreiten, und die Länge 06 als 6faches der Einheit 01 denken: von dieſer Größe 3 Einheiten wieder abzählen, heißt, bis zum Punkte 3 zurückſchreiten, und den Begriff der Länge 03 als 3faches der Einheit auffaſſen. Wollte man nun, um zu demſelben Reſultate zu gelangen, von der Länge 2 erſt 3 Einheiten hinweg- und alsdann 4 Einheiten hinzuthun; ſo würde man zuvörderſt von dem Punkte 2 in der Richtung OS rückwärts ſchreiten müſſen. Nachdem man hierdurch in den Punkt 0 gekommen iſt, iſt zwar alle Quantität der Länge 02 verſchwunden, ſodaß man nun keine weitere Verminderung mit derſelben vornehmen kann; allein es iſt noch keineswegs die Möglichkeit des weiteren Fortſchrittes in der Richtung OS (was der ferneren Anwendbarkeit des Bildungsgeſetzes der Zahlen in entgegengeſetzter Richtung entſpricht) geraubt. Schreitet man demzufolge um die abſolute Länge 3 vom Punkte 2 aus in der negativen Richtung fort; ſo gelangt man in den Punkt −1. Beginnt man nun in dieſem Punkte, um in der poſitiven Richtung ON um 4 Einheiten wieder vorzuſchreiten (oder um zu der

Zahl —1 vier Einheiten hinzuzufügen); so gelangt man endlich in denselben Punkt 3 oder zu demselben Begriffe der Zahl 3, wie durch das erstere Verfahren.

Denkt man sich unter der Eins den Besitz eines Vermögens von irgend einer Geldeinheit; so werden die positiven Zahlen den verschiedenen Werthen des Vermögens einer Person, die negativen Zahlen dagegen den verschiedenen Werthen der Schulden derselben entsprechen.

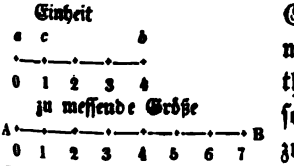
Setzt man an die Stelle der Zahleinheit Eins als Größeneinheit den Baum eines Waldes, und unterwürfe diejenige Menge von Bäumen einer Rechnung, welche jährlich in demselben gefällt werden können; so würden die negativen Zahlen Bäume bezeichnen, welche nicht gefällt, sondern welche vielmehr jährlich hinzugepflanzt werden müßten.

§. 8. Entstehung der Brüche.

Kehren wir jetzt zu der obigen Reihe der ganzen Zahlen zurück, und untersuchen, ob darin die Werthverhältnisse sämmtlicher Größen zu ihren Einheiten enthalten sind. Wenn man zur Messung einer jeden Größe eine beliebig zu wählende Einheit annehmen wollte; so wäre es allerdings möglich, die Quantitätsverhältnisse aller Größen durch die obigen Zahlen auszudrücken, weil man alsdann zur Einheit immer nur einen aliquoten Theil des Ganzen zu nehmen brauchte. In diesem Falle wäre nun zwar eine jede Größe in Beziehung zu der ihr eigenthümlichen Einheit bestimmt; da aber die Einheiten für die verschiedenen Größen verschieden ausfallen und untereinander in keinem bekannten Verhältnisse stehen würden; so würde man die verschiedenen Größen nicht mit einander vergleichen und von ihren gegenseitigen Werthverhältnissen keinen vollständigen Begriff erhalten können. Bei einem solchen Verfahren könnte man sogar alle Quantitätsverhältnisse durch eine einzige Zahl ausdrücken, wenn man für alle Größen denselben aliquoten Theil zur Einheit wählte. Da hierdurch die Hauptaufgabe, die gegenseitigen Größenverhältnisse auf bestimmte Begriffe zu bringen, gänzlich vereitelt werden würde; so sieht man, wie unzulässig es sein würde, zwei Größen miteinander zu vergleichen, welche nach ver-

schiedenen Einheiten gemessen sind; es muß vielmehr Prinzip bleiben, alle Größen durch Beziehungen auf Ein und dieselbe unveränderliche Einheit darzustellen. Diese Beziehungen brauchen indessen nicht absolut einfach zu sein; die Vorstellung von der Quantität einer Größe kann auch mittelbar dadurch zur Erkenntniß gebracht werden, daß man dieselbe zuvörderst mit einer zweiten Größe vergleicht, und darauf das Verhältniß dieser zweiten Größe zu der bekannten Einheit angibt. Ein solches indirektes Bestimmungsverfahren wird nun in der That angewendet, um die Zahlwerthe für alle diejenigen Größen zu erhalten, welche keine genauen Vielfache von der Einheit sind.

Man zerlegt nämlich die ursprüngliche Einheit in eine gewisse Anzahl gleicher oder aliquoter Theile, und versucht, die gegebene Größe durch einen solchen aliquoten Theil zu messen, indem man denselben als neue untergeordnete Maaßeinheit ansieht, und das Vielfache angibt, welches von derselben genommen werden muß, oder auch, indem man angibt, wie viel dieser neuen Einheiten man in derselben Richtung aneinander fügen muß, um die gegebene Größe zu erhalten. So könnte man z. B., um die Größe AB durch die Einheit *ab* zu messen, Letztere in 4 gleiche Theile *ac* theilen. Nähme man alsdann einen solchen vierten Theil von *ab*, also *ac*, zur neuen Einheiten an; so würde man finden, daß AB das 7fache von *ac* wäre, während *ac* der 4te Theil der ursprünglichen Einheit *ab* ist. Die Zahl, welche dieses Werthverhältniß von AB zur Einheit *ab* ausdrückt, wird $\frac{7}{4}$ geschrieben, und heißt ein Bruch, von welchem die untere Zahl 4 der Nenner und die obere Zahl 7 der Zähler ist.



Alle positiven Zahlen nun, denen die untergeordnete Einheit $\frac{1}{4}$ (Ein Viertel der ursprünglichen Einheit) zu Grunde läge, würden die Reihe

$$\frac{1}{4}\ \frac{2}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{4}\ \frac{5}{4}\ \frac{6}{4}\ \frac{7}{4}\ \frac{8}{4}\ \ldots\ldots$$

bilden, welche auf eine ganz ähnliche Weise erzeugt ist, wie die der ganzen Zahlen, indem man zu dem ersten Viertel ein zweites, drittes, viertes Viertel u. s. w. hinzugefügt hat. Da $\frac{1}{4}$ ein aliquoter Theil von 1 ist; so wird jener Bruch auch ein aliquoter

Theil von jedem Vielfachen von 1 oder von jeder ganzen Zahl sein, und es leuchtet ein, daß durch fortgesetztes Aneinanderfügen von Vierteln, je nach der vierten Hinzufügung der Werth der nächstfolgenden ganzen Zahl entstehen muß, sodaß in der vorstehenden Reihe die ganzen Zahlen 1, 2, . . . resp. unter den Formen $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{4}$, . . . enthalten sind.

§. 9. Doppelte Bedeutung eines Bruches.

Außerdem kann man sich die Bedeutung eines jeden Bruches, z. B. die von $\frac{5}{4}$, auf eine doppelte Weise denken: entweder stellt derselbe das 5fache vom 4ten Theile der Einheit, oder den 4ten Theil vom 5fachen der Einheit dar. Um Dies deutlich einzusehen, wollen wir versuchen, folgenden allgemeinern Satz nachzuweisen, von welchem der vorliegende nur ein besonderer Fall ist. Wenn A irgend eine Größe und $a, b, c, d \ldots$ beliebige positive ganze Zahlen bedeuten; so erhält man dasselbe Resultat, ob man nun entweder 1) von A das $a$fache, oder auch den $a$ten Theil, darauf von der erhaltenen Größe das $b$fache oder auch den $b$ten Theil, alsdann das $c$fache oder auch den $c$ten Theil u. s. w. nimmt, oder ob man 2) diese Vervielfachungen oder Theilungen in einer jeden beliebigen anderen Reihenfolge an der Größe A zur Ausführung bringt. Bezeichnet man also die Operation der Vervielfachung durch die Zahl a mit $\times a$ und die der Theilung in a gleiche Theile durch: a; so wäre z. B. $A \times a : b \times c = A \times a \times c : b = A : b \times a \times c = A : b \times c \times a$ u. s. w.

Es stelle ein jedes der kleineren Quadrate in der seitstehenden Figur die Quantität der Größe A dar. Nimmt man dieselbe $a$mal; so erhält man die in der oberen horizontalen Reihe liegenden Quadrate, deren Anzahl gleich der Anzahl Einheiten ist, aus welchen a besteht. Nimmt man alsdann die hierdurch erhaltene Größe $b$mal; so erhält man eine Anzahl der ersteren gleiche horizontale Reihen, deren Menge gleich der Anzahl Einheiten ist, aus welchen b besteht.

1	2	3	4	. . .	a.
2					
3					
4					
.					
.					
.					
b					

Das Reſultat wird angedeutet durch $A \times a \times b$. So oft man nun bei der letzteren Operation eine ganze horizontale Reihe ſetzte, ſetzte man auch eine jede Einheit dieſer Reihe; es wurde alſo eine jede der a Einheiten der horizontalen Reihe b mal geſetzt. Das b malige Setzen irgend einer Einheit der horizontalen Reihe entſpricht nun offenbar dem Einmaligen Setzen einer vertikalen Reihe von b Einheiten, und da die horizontale Reihe a Einheiten enthält; ſo entſpricht jene Operation auch dem a maligen Setzen einer vertikalen Reihe von b Einheiten d. i. einer Operation, welche durch $A \times b \times a$ angedeutet iſt. Der Sinn des vorſtehenden Satzes, durch arithmetiſche Zeichen dargeſtellt, iſt alſo

$$A \times a \times b = A \times b \times a.$$

Wenn die Größe A erſt a mal genommen und die dadurch erhaltene Größe in b gleiche Theile getheilt werden ſollte; ſo ſtelle eine vertikale Reihe der obigen Figur die Größe A dar. Nimmt man dieſe Reihe a mal; ſo erhält man a ſolcher vertikalen Reihen. Theilt man die ſo erhaltene Größe in b gleiche horizontale Reihen; ſo ſtellt eine jede horizontale Reihe die Größe $A \times a : b$ dar. Dieſelbe horizontale Reihe würde man nun aber offenbar auch erhalten haben, wenn man zuvörderſt die Größe A, d. h. die gegebene vertikale Reihe in b gleiche Theile getheilt und einen ſolchen aliquoten Theil a mal zu einer horizontalen Reihe zuſammengefügt hätte. Dieſer Satz, in Zeichen dargeſtellt, heißt

$$A \times a : b = A : b \times a.$$

Sollte endlich die Größe A erſt in a und die dadurch erhaltene Größe in b gleiche Theile getheilt werden; ſo ſtelle die ganze Fläche der obigen Figur die Größe A dar. Ein Theilen derſelben in a gleiche Theile entſpricht einem Herſtellen einer vertikalen Reihe und ein abermaliges Theilen dieſer Reihe in b gleiche Theile einem Herſtellen eines einzelnen der kleinen Quadrate oder der Größe $A : a : b$. Es iſt leicht einzuſehen, daß man dasſelbe Reſultat erhält, wenn man zuvörderſt die Größe A oder die ganze Figur in b horizontale und darauf eine jede horizontale Reihe in a gleiche Theile zerlegt, oder die Größe

$A:b:a$ herſtellt. Dieſer Satz wird arithmetiſch durch $A:a:b = A:b:a$ angedeutet.

Denkt man ſich nun unter der im Vorſtehenden beliebig angenommenen Größe A die Einheit der abſoluten Zahlen, alſo 1, ſo iſt $A \times a = a$, $A \times b = b$, $A:a = \frac{1}{a}$, $A:b = \frac{1}{b}$, und die vorſtehenden Sätze heißen $a \times b = b \times a$, $a:b = \frac{1}{b} \times a$, $\frac{1}{a}:b = \frac{1}{b}:a$ oder in Worten: das $b$fache von a iſt gleich dem $a$fachen von b, der $b$te Theil von a iſt gleich dem $a$fachen von $\frac{1}{b}$, der $b$te Theil von $\frac{1}{a}$ iſt gleich dem $a$ten Theile von $\frac{1}{b}$.

Um aus dieſen Sätzen das in Rede ſtehende Prinzip in ſeiner größten Allgemeinheit zu entwickeln; ſo bezeichne die Formel $Aabcd\ldots$ nach der Reihenfolge der Buchſtaben $a, b, c, d\ldots$, unter welchen poſitive ganze Zahlen verſtanden werden, den Hergang einer Operation, in Folge deren ſukzeſſive aus der Größe A (welche auch die Zahleneinheit ſein kann) durch Vervielfachung oder Theilung mit jenen Zahlen eine neue Größe erzeugt wird. Die möglichen Verſetzungen, welche die Buchſtaben $a, b, c, d\ldots$ zulaſſen, können ſämmtlich hergeſtellt werden, wenn man nach und nach die Stellen zweier nebeneinander ſtehender Buchſtaben miteinander vertauſcht; ſo erhält man z. B. aus der Reihenfolge $abcd$ allmählig $abdc$, $adbc$, $adcb$ u. ſ. w. Nach dem Obigen kann man nun leicht zeigen, daß die Reſultate, welche durch zwei ſolche Formen dargeſtellt werden, in welchen nur zwei nebeneinanderſtehende Buchſtaben ihre Stellen vertauſcht haben, identiſch ſind. Denn ſetzt man z. B. in den beiden aufeinander folgenden Formen $Aadbcefg\ldots$ und $Aadcbefg\ldots$ für die Größe Aad das Zeichen B; ſo werden dieſelben $Bbcefg\ldots$ und $Bcbefg\ldots$, oder weil nach den vorhin bewieſenen Sätzen immer $Bbc = Bcb$ iſt, wenn man für dieſe Größen das Zeichen C einführt, $Cefg\ldots$ und $Cefg\ldots$, ein Paar Reſultate, welche offenbar identiſch ſind.

Hiernach leuchtet ein, daß man ſich die Entſtehung irgend eines Bruches entweder ſo denken könne, daß die Einheit erſt in ſo viel gleiche Theile getheilt ſei, als der Nenner Einheiten an-

gibt, und darauf ein solcher Theil so vielmal genommen sei, als der Zähler des Bruches Einheiten enthält, oder auch, daß die Einheit so vielmal genommen sei, als der Zähler Einheiten angibt, und darauf dieses Vielfache in so viel gleiche Theile zerlegt sei, als der Nenner Einheiten enthält. Die erstere Vorstellungsart ist jedoch, wenn man das ganze Zahlensystem schematisch überblicken will, die natürlichere, weil dieselbe zuvörderst eine neue Einheit (in der obigen Reihe das Viertel) erzeugt, und aus derselben genau nach demselben Gesetze, nach welchem sich die ganzen Zahlen bilden, sämmtliche gleichnamige Brüche organisch in einer fortlaufenden Reihe bildet.

Endlich kann man sich auch eine jede ganze Zahl als einen Bruch denken, dessen Zähler die Zahl selbst und dessen Nenner 1 ist, indem man mit dem Begriffe, daß eine Größe in Einen aliquoten Theil getheilt sein solle, die Vorstellung verbindet, daß sie selbst unverändert gesetzt sei.

§. 10. Verschiedene Arten von Brüchen.

Ein Bruch wie $\frac{1}{4}$, welcher kleiner ist, als die Einheit, heißt ein echter, ein jeder andere Bruch, wie $\frac{7}{4}$, welcher größer ist, als die Einheit, heißt ein unechter.

Da in der obigen Reihe der gebrochenen Zahlen auch alle ganzen Zahlen enthalten sind, indem $\frac{4}{4}=1$, $\frac{8}{4}=2$, u. s. w. ist, und die Bildung der ersteren von Viertel zu Viertel fortschreitet, welches ein aliquoter Theil der Einheit, also auch ein aliquoter Theil des Größenunterschieds irgend zwei aufeinanderfolgender ganzer Zahlen ist; so begreift man leicht, daß man den Werth eines jeden in jener Reihe enthaltenen unechten Bruches auch in der Weise darstellen kann, daß man die zunächst vorhergehende ganze Zahl und dann noch die Anzahl der Viertel oder den echten Bruch angibt, um welchen jener unechte Bruch die letztere ganze Zahl überschreitet. So könnte man sagen, daß $\frac{7}{4}$ gleich 1 Einheit und außerdem 3 Viertel der Einheit wäre. Man schreibt Dies $\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$, und nennt eine solche aus einer ganzen und einem echten Bruche zusammengesetzte Zahl eine gemischte. Man erkennt jedoch leicht, daß diese Darstellungsweise, soviel Vortheile dieselbe auch in gewissen anderen Beziehungen darbietet, keinen einfachen Begriff von dem Werthe

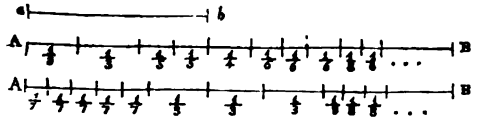
der Zahl $\frac{7}{4}$ liefert. Durch $1\frac{1}{4}$ wird die Zahl $\frac{7}{4}$ gewissermassen nicht unmittelbar als Ganzes, sondern vielmehr nach zwei Theilen, 1 und $\frac{1}{4}$, aus welchen sie zusammengesetzt ist, dargestellt. Diese Theile beziehen sich sogar zunächst auf zwei verschiedene Einheiten (resp. 1 und $\frac{1}{4}$), deren Beziehung zueinander zwar bekannt ist, welche aber erst nacheinander gedacht werden können. Der Ausdruck $\frac{7}{4}$ dagegen hat den Vorzug der größeren logischen Einheit, indem er das Bildungsgesetz der dadurch bezeichneten Zahl nach einem bestimmten Rythmus (dem mehrmaligen Setzen) aus einem einfachen Elemente (dem vierten Theile der Einheit) anschaulich macht und es demnach wegen der Gleichheit der zunächst unterliegenden Einheiten auch zuläßt, verschiedene andere nach demselben Rythmus gebildete Zahlen (nämlich alle Brüche der obigen Reihe, deren nächste Einheit das Viertel ist) unmittelbar miteinander zu vergleichen.

§. 11. Kommensurabele und inkommensurabele Größen.

Die letztere Reihe der gebrochenen Zahlen, welche nach dem Gesetze der ganzen Zahlen aus dem Viertel, als Einheit, gebildet sind, stellt offenbar eine größere Menge von Größenverhältnissen dar, deren Zahlwerthe theils die Werthe der ganzen Zahlen selbst sind, theils zwischen den Werthen der ganzen Zahlen liegen. Es bleibt jedoch zwischen je zwei aufeinander folgenden Brüchen ein Unterschied, und es sind noch eine unzählige Menge von Größen denkbar, deren Werthe durch Zahlen ausgedrückt werden müßten, welche größer, als eine vorhergehende, und kleiner, als eine nachfolgende Zahl jener Reihe, wären. Um solche Größenverhältnisse darzustellen, müßte man anstatt des Viertels einen kleineren Theil der Einheit, z. B. $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$... wählen, und daraus nach dem einfachen Bildungsgesetze durch Hinzufügung Eines solchen Theiles nach dem anderen eine der obigen ähnliche Reihe von Zahlwerthen erzeugen, welche alsdann wiederum eine größere Anzahl näher zusammenliegender Größenverhältnisse darstellen würde. Wollte man systematisch verfahren; so müßte man einen aliquoten Theil und zwar wiederum den 4ten Theil von der früheren untergeordneten Einheit, nämlich von dem Viertel, nehmen, um die eben besprochene Reihe zu erzeugen; alsdann würde die neue

Reihe offenbar alle Glieder der vorhergehenden mit enthalten, und durch das letztere Verfahren gewiſſermaßen ergänzt ſein.

Wie klein man nun aber auch das Bildungselement einer ſolchen Reihe annehmen möge, immer wird dasſelbe eine gewiſſe Größe behalten, wird demnach noch ferner theilbar ſein, und eine Reihe von Gliedern erzeugen, deren Unterſchied einen wirklichen Werth hat, ſodaß zwiſchen je zwei aufeinander folgenden Gliedern immer noch Zahlwerthe denkbar bleiben, welche in der erzeugten Reihe nicht vorhanden ſind. Auch wenn man bei der Beſtimmung von Zahlwerthen ganz unſyſtematiſch verfahren, und dieſelben aus beliebig vielen Stücken beſtehend angeben wollte, von denen ein jedes Stück einen anderen aliquoten Theil der Einheit zur nächſten Einheit hätte, indem man z. B. zur Beſtimmung aller Längen der Linie AB durch die Einheit *ab* zuerſt von A gegen B



2 mal $\frac{1}{3}$, dann 2 mal $\frac{1}{5}$, dann 1 mal $\frac{1}{4}$, dann 3 mal $\frac{1}{7}$, dann 2mal $\frac{1}{8}$ u. ſ. f. abſchnitte, ein anderes Mal aber erſt 5 mal $\frac{1}{4}$, dann 2 mal $\frac{1}{3}$, dann 3 mal $\frac{1}{8}$ u. ſ. f. abſchnitte, und nachdem man behuf möglichſter Vervielfältigung und demnach behuf größter gegenſeitiger Annäherung der Theilpunkte die Einheit in immer kleiner und kleiner werdende aliquote Theile getheilt hätte, ähnliche Operationen in allen denkbaren Mannigfaltigkeiten ausführte; ſo leuchtet doch ein, daß alle hierdurch auf der Linie AB erhaltenen Theilpunkte, welche nicht zuſammenfallen, eine Länge zwiſchen ſich laſſen, welche, wenn ſie auch noch ſo klein iſt, doch noch ferner theilbar bleibt, ſodaß man ſich durch irgend einen Punkt eines ſolchen Abſtandes zweier Theilpunkte von A gegen B eine Länge begränzt denken kann, deren Zahlwerth durch keine der zahlloſen vorhergehenden Meſſungen vollkommen beſtimmt iſt. Größen von dieſer Beſchaffenheit, welche zwar durch geometriſche Konſtruktion in ihrem quantitativen Verhältniſſe zur Einheit vollkommen genau dargeſtellt werden können, welche aber behuf ihrer Darſtellung als Zahlwerthe eine ins Unbegränzte fortgeſetzte Theilung der Einheit in unendlich kleine aliquote Theile erforderlich machen, nennt man in Beziehung zu dieſer Einheit inkommenſurabel, während andere Größen, welche ſich durch

eine endliche Mal wiederholte Theilung der Einheit in bestimmbare aliquote Theile messen lassen, kommensurabel heißen.

§. 12. Vollständige Ergänzung der Reihe der positiven und negativen Zahlen zu einem stetigen Ganzen.

Was vorhin bei der Entstehung der negativen ganzen Zahlen durch ein bloßes Umkehren des Sinnes oder der Richtung des Bildungsgesetzes der positiven ganzen Zahlen gesagt ist, findet offenbar auch seine Anwendung auf die Bildung der negativen gebrochenen Zahlen, welche in derselben Weise aus ihren ungeordneten, durch die Nenner kenntlich gemachten Einheiten erzeugt werden, wie die ganzen Zahlen aus der ursprünglichen Einheit. Vermittelst dieser negativen Brüche soll auf eine ganz gleiche Weise durch fortwährende Verkleinerung der Unterschiede der Übergang der diskreten Reihe der negativen Zahlen zu einem rythmisch und stetig gebildeten Ganzen vermittelt werden, sodaß die vollständige Reihe aller positiven und negativen Zahlen, deren Gränze die 0 ist, die Repräsentantin der aus stetigen Theilen gebildeten Unendlichkeit von Größenverhältnissen wird, welche nach demselben Gesetze nach zwei direkt entgegengesetzten Seiten ohne Ende fortschreitet.

Es leuchtet ein, wie man sich die Entstehung aller negativen Zahlen aus der negativen Einheit (-1) in dem Sinne von 0 abwärts ganz in derselben Weise denken könne, wie die Entstehung der positiven Zahlen aus der positiven Einheit in dem Sinne von 0 aufwärts. Die Zahl $-a$ ist durch a maliges Zählen der Zahl -1 in der dem positiven Zählen entgegengesetzten Richtung erzeugt, oder sie ist das a fache der negativen Einheit, d. i. $=-1\times a$. Ebenso ist $-\frac{a}{b}$ das a fache des $b$ten Theiles der negativen Einheit, oder auch (§. 9) der $b$te Theil des $a$fachen der negativen Einheit d. i. $=-1:b\times a$.

Wenn man unter der in §. 9 mit A bezeichneten Größe die negative Einheit versteht; so leuchtet ein, wie die daselbst entwickelten Sätze hinsichtlich der Vervielfältigung und Theilung einer Zahl zu verschiedenen Malen auch auf diese Operation an einer negativen Größe Anwendbarkeit behalten.

So iſt z. B. nach dem Satze:

$$A \times a : b = A : b \times a$$

auch

$$-1 \times a : b = -1 : b \times a,$$

d. i., da $-1 \times a = -a$ und $-1 : b = -\frac{1}{b}$ iſt,

$$-a : b = -\frac{1}{b} \times a.$$

Das hierdurch dargeſtellte Reſultat iſt offenbar eine negative Zahl, deren abſoluter numeriſcher Werth $a : b$ oder auch $\frac{1}{b} \times a$ iſt, d. h., dasſelbe iſt gleich

$$-(a : b) \text{ oder } = -\left(\frac{1}{b} \times a\right).$$

Es iſt ſchon vorhin bemerkt, daß die Werthe der poſitiven und negativen Zahlen, von der Gränze 0 anhebend, hinſichtlich ihrer Quantität eine jede beliebige Größe überſchreiten können, und ſich demnach in dieſen Richtungen keiner Gränze nähern. Obgleich wir uns nun keine Vorſtellung von dem abſoluten Werthe des unendlich Großen machen können; ſo exiſtirt dasſelbe doch in der Wirklichkeit, und es iſt nothwendig, für dasſelbe ein arithmetiſches Zahlzeichen einzuführen, welches andeutet, daß die dadurch dargeſtellte Zahl *größer* ſei, als *irgend eine denkbare* Zahl. Dieſes Zeichen iſt ∞, und kann ſowol poſitiv, wie negativ genommen werden, jenachdem man damit das unendlich Große in poſitiver oder negativer Richtung bezeichnen will.

Von dem Unendlichen iſt das Endliche *kein Theil*, weil Erſteres aus dem Letzteren nicht durch mehrmaliges Setzen erzeugt werden kann. Ein noch ſo großes Vielfaches einer endlichen Größe iſt wiederum eine endliche Größe. Das Endliche ſteht demnach zu dem abſolut Unendlichen in derſelben Beziehung, wie das Nichts zu dem Endlichen. Man kann eine endliche Größe in noch ſo viel aliquote Theile theilen, ohne daß dieſe Theile aufhörten, endliche Größen zu bleiben, und umgekehrt, wenn die Anzahl der Theile, in welche irgend eine endliche Größe a zerlegt iſt, eine endliche Zahl iſt, muß auch ein jeder Theil einen endlichen Werth haben. Hieraus folgt, daß wenn gefordert würde, daß die Anzahl der aliquoten Theile, in welche irgend eine endliche Größe zerlegt werden ſolle, abſolut unendlich groß oder $=\infty$ ſei, ein

ſolcher Theil durchaus keinen denkbaren Werth haben dürfe, und mithin $=0$ ſein müſſe. Welchen endlichen Werth alſo auch die Zahl a haben möge, der Bruch

$$\frac{a}{\infty},$$

welcher eigentlich nur ein arithmetiſches Zeichen iſt, wird immer $=0$ ſein. Ebenſo wird die Forderung, irgend eine endliche Größe ∞ mal zu nehmen, immer nur den Begriff des abſolut unendlich Großen erwecken, welches ſowenig aus Theilen beſteht, wie ein Vielfaches von ihm gedacht werden kann.

§. 13. Künſtliches Zahlenſyſtem.

Wenn man bei der ſukzeſſiven Bildung der ganzen Zahlen aus der Einheit für eine jede nächſt höhere Zahl ein neues Zeichen und ein ſelbſtſtändiges Wort einführen wollte; ſo würde das Rechnen mit Zahlen ſowol durch die unüberſichtliche Bezeichnungsweiſe, wie durch die ermüdendſte Anſtrengung des Gedächtniſſes zu einer der ſchwierigſten Beſchäftigungen werden. Es iſt eine in der Natur begründete Unvollkommenheit des menſchlichen Geiſtes, daß derſelbe momentan nur Einen und zwar nur einen einfachen Begriff ganz genau zu faſſen vermag. Wie wir, ſtreng genommen, nicht 2, 3, 4 Punkte zu gleicher Zeit vollkommen deutlich ſehen können; ſo können wir auch nicht eine Vielheit von 2, 3, 4 Dingen mit aller Schärfe des Verſtandes denken. Die Schwierigkeit wächſt mit der Anzahl der Theile; ſich eine Menge von hundert einzelnen Gliedern einer Reihe zu denken, und dabei einen jeden Theil in ſeinem richtigen Verhältniſſe zum Ganzen geiſtig anzuſchauen, iſt gewiß den meiſten Menſchen unmöglich. Um dieſe Schwierigkeit der Vorſtellung großer Mengen und der Vergleichung derſelben untereinander möglichſt zu beſeitigen, gewährt es einen bedeutenden Vortheil, die Theile der größeren Anzahlen nach einem gewiſſen Geſetze in Gruppen zu ordnen, deren Menge alsdann viel kleiner wird und demnach leichter zu überblicken iſt. Es geht hierbei zwar die unmittelbare Erkenntniß des Verhältniſſes verloren, in welchem der einfache Theil zum Ganzen ſteht, aber die allmählige Anſchauung der Verhältniſſe, in welchen die Gruppen zu ihren Theilen und zu einander ſtehen, führt doch wegen der geringeren Anzahl der

zu betrachtenden Elemente mit Hülfe des Abſtraktionsvermögens raſcher und befriedigender zum Ziele eines vollſtändigen Begriffes.

Um, von dieſem Prinzipe geleitet, die höheren Zahlgrößen in leicht zu überſehende Gruppen zu bringen, verfährt man folgendermaaßen: Man beſtimmt, daß die niedrigſte Gruppe eine gewiſſe Anzahl, bei den dekadiſch gebildeten Zahlen zehn (10), Einheiten enthalten ſolle; ſolche zehn Einheiten, welche in Bezug auf die Klaſſifikation der Zahlenreihe Einer genannt werden, fügt man alsdann als ein Ganzes zuſammen, und nennt das Letztere einen Zehner. Enthält eine Zahl mehr, als zehn Zehner; ſo faßt man wiederum je zehn Zehner zu einem Ganzen zuſammen, und nennt dasſelbe einen Hunderter. Zehn Hunderter bilden ferner einen Tauſender. Zehn Tauſender einen Zehntauſender u. ſ. f. Die Zehner, Hunderter, Tauſender ꝛc. begreift man unter dem Namen der Einheiten höherer Ordnung. Die nach dieſem Geſetze klaſſifizirten Zahlen bilden das dekadiſche Zahlenſyſtem, deren Grundzahl zehn (10) iſt. Man ſieht leicht, daß man anſtatt der Zehn eine jede andere Zahl zur Grundzahl des Syſtemes hätte nehmen können.

Zur Darſtellung der Zahlen durch Zahlzeichen hat man außer der 0 die neun einfachen Ziffern 1, 2 . . . 9, durch welche eine jede Zahl dargeſtellt werden kann, welche kleiner iſt, als die Grundzahl zehn. Um größere Zahlen darzuſtellen, bezeichnet man mit Hülfe der vorſtehenden Ziffern die Anzahlen der Einheiten der verſchiedenen höheren Ordnungen, indem man zuerſt angibt, wie viel Einheiten der höchſten Ordnung in der zu beſtimmenden Zahl enthalten ſind, dann wie viel Einheiten der nächſt niedrigeren Ordnung u. ſ. f. bis zu den Einern herab, und indem man dieſe Ziffern ſämmtlich in horizontaler Richtung nebeneinander ſetzt. Die Ordnung, welche eine jede dieſer Ziffern bezeichnen ſoll, macht ſich ganz einfach durch die Stelle kenntlich, in welche die Ziffer von der Rechten nach der Linken zu geſtellt wird, ſodaß die Einer die erſte Stelle rechts, die Zehner die folgende Stelle u. ſ. w. einnehmen. Falls von irgend einer Ordnung keine Gruppen vorhanden wären, tritt an die Stelle derſelben das Zeichen 0.

Auf dieſe Weiſe werden alle ganzen Zahlen nach Einheiten höherer Ordnungen, von denen jede nächſtfolgende das Zehnfache

der vorhergehenden und jede vorhergehende den zehnten Theil der folgenden ist, gruppirt und dargestellt. Um auch alle übrigen Größenverhältnisse, welche durch keine ganzen Zahlen bezeichnet werden können, nach einem ähnlichen Rythmus darzustellen, ist es offenbar nur erforderlich, alle Zahlwerthe, welche kleiner sind, als 1, oder alle echten Brüche, einer der früheren entsprechenden Klassifikation zu unterwerfen. Zu diesem Ende theilt man die Einheit in 10 gleiche Theile oder Zehntel, und gibt an, wie viel solcher Zehntel in dem Werthe des zu bestimmenden echten Bruches enthalten sind. Wird derselbe hierdurch noch nicht erschöpft; so theilt man das Zehntel nochmals in 10 gleiche Theile oder in Hundertstel, und gibt die Anzahl der noch vorhandenen Hundertstel an u. s. f. Die Ziffern, welche die Menge der vorhandenen Zehntel, Hundertstel, Tausendstel u. s. w. angeben, folgen sich einander nach der Stelle, welche die Einerziffer einnimmt, von der Rechten nach der Linken. Wo sich in einer solchen Zahl die ganzen Zahlen von dem angehängten Bruche scheiden, also zwischen die Ziffer der Einer und der Zehntel, macht man ein Komma, z. B. 304,604 (3 Hunderter, kein Zehner, 4 Einer, 6 Zehntel, kein Hundertstel und 4 Tausendstel). Wären gar keine ganzen Zahlen vorhanden, und nur ein ächter Bruch darzustellen; so würde man an die Stelle der Einer eine 0 zu setzen haben z. B. 0,5 (5 Zehntel).

Die auf diese Weise nach dem Gesetze des dekadischen Zahlensystemes dargestellten Brüche und gemischten Zahlen heißen Dezimalbrüche.

Die Operationen der Arithmetik.

§. 14. Addition.

Eine zweite Zahl (Summand) *b* zu einer ersten Zahl (Summand) *a* addiren, heißt, die Zahl *a* in der nach beiden Seiten unbegränzten Reihe der positiven und negativen Zahlen durch das einfache Gesetz der allmähligen Zu- oder Abzählung um je Eine dem Summand zuletzt zu Grunde liegende Einheit

in derjenigen Richtung und um diejenige Quantität weiterbilden, welche resp. durch das Zeichen und den absoluten numerischen Werth der Zahl b angegeben ist. Die hierdurch erhaltene und durch $a+b$ dargestellte Zahl heißt die Summe von a und b.

Hiernach hat man ohne Weiteres

$$4+6=10,\ 4+(-2)=2,\ 4+(-4)=0,\ 4+(-6)=-2,\ \ 0+6=6$$
$$-4+(-6)=-10,\ -2+4=2,\ -4+4=0,\ -6+4=-2,\ 0+(-6)=-6.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß immer $a+b=b+a$ und demnach $a+b+c+\ldots=c+b+a+\ldots$ ist, oder daß die Reihenfolge, in welcher man mehrere Zahlen zu einer Summe zusammenfügt, auf das Resultat keinen Einfluß hat.

§. 15. Subtraktion.

Ihr Prinzip Trennung der durch Addition gestifteten Verbindung. — Eine zweite Zahl b (den Subtrahend) von einer ersten Zahl a (den Minuend) subtrahiren, heißt, die Zahl a als die Summe zweier Summanden, deren Einer der Subtrahend b ist, ansehen, und den anderen Summand finden. Die gesuchte Zahl $a-b$ heißt die Differenz zwischen a und b.

Um die Operation auszuführen, wird man also die Zahl a in der unbegränzten Reihe der Zahlen durch allmählige Zu- oder Abzählung in derjenigen Richtung, welche der durch das Zeichen des Subtrahends b angegebenen Richtung gerade entgegengesetzt ist, außerdem aber um diejenige Quantität weiterbilden, welche durch den absoluten numerischen Werth von b bezeichnet wird. Denn addirte man hierauf zu der so erhaltenen Differenz c die Zahl b; so würde man in Folge der Erklärung von Addition den Minuend a als die Summe $c+b$ erhalten. Da diese Summe nach der obigen Bemerkung auch gleich $b+c$ ist; so folgt, daß die Aufgabe der Subtraktion durch das vorstehende Verfahren vollkommen gelöst ist, indem hiernach die gefundene Differenz sowol der erste, wie der letzte der beiden Summanden sein kann, deren anderer der Subtrahend b und deren Summe gleich dem Minuend a ist.

Man bemerkt, daß der allgemeine Begriff der Addition den der Subtraktion mit einschließt, indem man die zu subtrahirende

Größe nur mit dem entgegengesetzten Zeichen zu nehmen braucht, um dieselbe alsdann zu addiren.

Hiernach hat man

$$6-4=2,\ 6-6=0,\ 6-8=-2,\ 6-(-4)=10, 0-6=-6$$
$$-6-4=-10,\ -6-(-6)=0,\ -6-(-8)=2,\ 0-(-6)=6.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Reihenfolge, in welcher verschiedene Additionen und Subtraktionen ausgeführt werden, auf das Resultat keinen Einfluß hat. Da die Subtraktion einer Größe auf eine Addition derselben mit entgegengesetztem Zeichen hinausläuft; so gehört dieser Fall zu dem bei der Addition dargethanen Falle, nach welchem die Reihenfolge verschiedener Additionen gleichgültig ist.

Da die Ausführung der Addition oder Subtraktion auf einem bloßen Akte der Zu- oder Abzählung von Einheiten beruhet; so leuchtet ein, daß man nur Brüche von denselben Nennern oder von denselben zunächst zu Grunde liegenden Einheiten unmittelbar addiren oder subtrahiren könne: so ist

$$\pm\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}\pm\frac{d}{a}=\frac{\pm b\pm c\pm d}{a}.$$

Wie Brüche von verschiedenen Nennern in solche umgewandelt werden, welche sämmtlich dieselben Nenner oder dieselbe Benennung haben, kann erst später gezeigt werden.

§. 16. Multiplikation.

Eine Zahl a (den Multiplikand) mit einer andern Zahl b (den Multiplikator) multipliziren, heißt, aus dem Multiplikand a eine dritte Zahl (das Produkt) in derselben Weise erzeugen, wie der Multiplikator b aus der positiven Einheit durch das einfache Bildungsgesetz der gemeinen Zahlen — also zuvörderst durch Theilung der positiven Einheit in gewisse abiquote Theile (deren Anzahl sich auf einen einzigen oder auf die Einheit selbst reduzirt, im Fall der Multiplikator eine ganze Zahl ist), darauf aber durch Zusammenzählung dieser Theile in der der positiven Einheit entsprechenden, oder in der dieser entgegengesetzten Richtung d. h. durch Addition dieser Theile zu 0 oder durch Subtraktion derselben von 0 — entstanden ist.

So ist z. B. die negative Zahl $-\frac{a}{b}$ aus der positiven Einheit entstanden, indem Letztere zuvörderst in b gleiche Theile getheilt, und darauf ein solcher Theil a mal, nicht in der der positiven Einheit entsprechenden, sondern in der derselben *entgegengesetzten* Richtung gezählt oder nicht zu 0 addirt, sondern von 0 *subtrahirt* ist. Sollte demnach die negative Zahl $-c$ mit $-\frac{a}{b}$ multiplizirt werden; so hat man zuvörderst $-c$ in b gleiche Theile zu theilen, wodurch man die negative Zahl $-\frac{c}{b}$ (§. 9 und 12) erhält. Einen solchen Theil hat man a mal hintereinander von 0 zu *subtrahiren*; dies ergibt nach den Regeln der Subtraktion (§. 15) die *positive* Zahl $\frac{c}{b}\times a$, welche das a fache von $\frac{c}{b}$ darstellt.

Im Allgemeinen hat man

$$a\times b=ab,\quad -a\times b=-ab,\quad a\times -b=-ab,\quad -a\times -b=ab.$$

Da der *absolute* numerische Werth eines jeden Produktes offenbar nur von den Zahlwerthen des Multiplikators und des Multiplikands abhängt, das *Zeichen* des Produktes aber nur dadurch bedingt ist, ob jene beiden Größen gleichzeitig dieselben, oder ob sie verschiedene Zeichen haben; so leuchtet aus den in §. 9 entwickelten Sätzen ein, daß die Reihenfolge, in welcher zwei oder auch noch mehr Zahlen miteinander multiplizirt werden, seien sie nun positive, negative, ganze oder gebrochene Zahlen, auf den Werth des Produktes keinen Einfluß hat. Wegen dieser Fähigkeit, bei der Bildung eines Produktes die Rolle des Multiplikands mit der des Multiplikators auszutauschen, nennt man zwei oder auch mehrere miteinander multiplizirte Zahlen einfach die *Faktoren* des daraus entstandenen Produktes.

Wenn $a, b, c\ldots$ beliebige Zahlen bezeichnen; so ist $a=$ der Einheit, multiplizirt mit a, oder $a=1\times a$; ebenso $b=1\times b$, $c=1\times c$ ꝛc., und $a+b+c+\ldots=1\times(a+b+c+\ldots)$; mithin

$$1\times a+1\times b+1\times c=1\times(a+b+c.).$$

Dieſes Reſultat muß offenbar noch Richtigkeit behalten, wenn man für die Einheit der Zahlen oder für 1 eine jede beliebige andere Größe oder auch eine jede andere Zahl A ſubſtituirt; alsdann erhält man aber

$$Aa+Ab+Ac\ldots=A(a+b+c).$$

Aus zwei Zahlen a und b iſt nur Ein Produkt c möglich, weil $ab=ba$ iſt. Wenn aber der Eine Faktor a gegeben iſt; ſo muß auch nothwendig der andere Faktor $=b$ ſein, um das Produkt $c=ab$ zu erzeugen. Denn wäre auch $a\beta=c=ab$, und β von b verſchieden; ſo ſei $\beta=b\pm\gamma$. Alsdann iſt nach Obigem

$$a\beta=a(b\pm\gamma)=ab\pm a\gamma,$$

und der Vorausſetzung zuwider wäre

$$a\beta\gtrless ab.$$

Wenn man irgend eine poſitive, negative, ganze oder gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$ umkehrt, d. h. unter Beibehaltung des Zeichens den Zähler an die Stelle des Nenners ſetzt (indem man ganze Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1 anſieht); ſo iſt das Produkt aus $\frac{a}{b}$ und ſeinem Umgekehrten $\frac{b}{a}$ immer gleich der poſitiven Einheit. Denn da $\frac{a}{b}$ uud $\frac{b}{a}$ dasſelbe Zeichen haben; ſo iſt auch das Produkt $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}$ poſitiv. Daß aber, wenn a und b poſitiv gedacht werden,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,$$

erhellet aus dem Früheren. Dieſem Zufolge (und nach §. 9) iſt auch immer

$$A\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=A,$$

worin A jede beliebige Größe und Zahl bezeichnen kann.

§. 17. Diviſion.

Ihr Prinzip Trennung der durch Multiplikation geſtifteten Verbindung. — Eine Zahl a (den Dividend) durch eine Zahl b (den Diviſor) dividiren, heißt, die Zahl a als das Produkt zweier Faktoren anſehen, deren Einer der Diviſor b iſt, und den zweiten Faktor als den geſuchten Quotienten herſtellen.

Da zwei Zahlen, miteinander multiplizirt, immer dasſelbe Produkt erzeugen, und da, wenn der Eine Faktor gegeben iſt, der andere nur eine einzige beſtimmte Zahl ſein kann; ſo iſt es behuf Aufſuchung des Quotienten gleichgültig, ob der Diviſor als Multiplikand oder als Multiplikator angeſehen wird. Es kommt alſo bloß darauf an, eine Zahl zu ſuchen, welche, mit dem Diviſor b multiplizirt, das Produkt a ergibt. Stellt man b als Bruch $\frac{\beta}{\gamma}$ dar, worin β und γ poſitive oder negative ganze Zahlen, auch die Einheit, bezeichnen können; ſo muß

$$x\,\frac{\beta}{\gamma}=a$$

ſein.

Da nun, wie vorhin gezeigt, immer

$$a\left(\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)=\left(a\,\frac{\gamma}{\beta}\right)\frac{\beta}{\gamma}=a$$

iſt; ſo ſieht man, daß der geſuchte Quotient x erhalten wird, wenn man den Dividend a mit dem Umgekehrten $\frac{\gamma}{\beta}$ des Diviſors multiplizirt.

Die Operation der Diviſion iſt hiernach in dem allgemeinen Falle der Multiplikation ebenſo enthalten, wie die der Subtraktion in dem allgemeinen Falle der Addition. Man hat alſo auch

$$(c+d+e+\ldots):\frac{a}{b}=(c+d+e+\ldots)\times\frac{b}{a}$$

$$=c.\frac{b}{a}+d.\frac{b}{a}+e.\frac{b}{a}+\ldots=c:\frac{a}{b}+d:\frac{a}{b}+e:\frac{a}{b}+\ldots$$

§. 18. Potenziirung.

Alle durch die Operation der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division aus den gemeinen Zahlen zu erhaltenden Zahlen können keine Zahlformen erzeugen, deren Bildungsgesetz aus der Einheit verschieden wäre von dem, nach welchen die natürliche Reihe der einfachen Zahlen gebildet ist, da diese Operationen an den Zahlen nur solche Veränderungen vornehmen, welche dem Typus des einfachen Bildungsgesetzes entsprechen, und welche behuf Bildung der ganzen Reihe der gemeinen Zahlen an den einzelnen Gliedern dieser Reihe selbst als vorgenommen gedacht werden können. Um eine eigene Klasse von höheren Zahlformen zu erzeugen, deren besonderes Bildungsgesetz durch eine demselben entsprechende Bezeichnung versinnlicht wird, verfährt die Arithmetik folgendermaaßen: Es wird eine Zahl (der Exponent) gesetzt, um durch den Typus seiner Entstehung aus der positiven Einheit das Gesetz anschaulich zu machen, nach welchem aus einer anderen Zahl (der Wurzel) gewisse Zahlformen (Potenzen) gebildet werden sollen. Sowie nun die Entstehung der gemeinen Zahlen aus der positiven Einheit nicht auf einem absolut einfachen Akte beruhet, und im Wesentlichen folgende Momente enthält: 1) Setzen einer ursprünglichen Größe (der Einheit) *a*) entweder in der Einen (der positiven) oder *b*) in der entgegengesetzten (der negativen) Richtung, und sukzessives Fortbilden oder Vervielfältigen durch allmähliges Hinzuthun einer gleichen Einheit nach der Einen oder der anderen Richtung, wodurch durch bloßes Umkehren der Richtung des Bildungsgesetzes die negativen Größen aus den positiven oder die positiven aus den negativen erhalten werden, 2) Theilung der Einheit in aliquote Theile und Vervielfältigung dieser aliquoten Theile in denselben beiden Richtungen nach einem gleichen Gesetze, wodurch nach *n* maliger Vervielfältigung des *n* ten aliquoten Theiles die Einheit selbst wiedererzeugt wird — ebenso beruhet die Bildung der Potenzen auf keinem absolut einfachen Verfahren, sondern hat ähnliche Momente, welche der Entstehung des Exponenten als gemeiner Zahl aus der Einheit in der dem Potenziiren eigenthümlichen Weise entsprechen.

Der allgemeine Charakter der Potenz ist die Herstellung

eines Produktes aus Faktoren, welche sämmtlich der gegebenen Wurzel gleich sind. Dieser Begriff entspricht den Potenzen mit positiven ganzen Exponenten vollkommen, und dieselben entstehen wenn man die Wurzel a ebenso vielmal als Faktor setzt, wie der Exponent positive Einheiten enthält. So ist die dritte Potenz von a oder $a^3 = aaa$. Wie also der Exponent durch allmählige Addition Einer Einheit nach der andern zu der zuerst gesetzten Einheit entstand; so bildet sich die Potenz durch sukzessive Multiplikation mit der Wurzel a aus dieser Wurzel selbst.

Durch fortgesetzte Addition einer Einheit wächst also der Exponent um eine Einheit, während die Potenz gleichzeitig um einen Faktor, gleich der Wurzel, wächst. Die Beziehung zwischen diesen beiden Momenten der Bildungsgesetze des Exponenten und der Potenz ist daher leicht verständlich. Kehren wir dasselbe Bildungsgesetz am Exponenten in seiner Richtung um, subtrahiren also allmählig Eine Einheit nach der anderen; so vermindert sich die Potenz allmählig um Einen Faktor nach dem anderen, oder was Dasselbe ist, die nächstfolgende niedrigere Potenz der Reihe wird aus der vorhergehenden erhalten, wenn man diese Ein Mal durch die Wurzel dividirt, und wir finden, daß der schrittweisen Subtraktion Einer Einheit nach der anderen im Exponenten eine Division mit Einer Wurzel in der Potenz analog entspricht, wie der schrittweisen Addition im Exponenten eine Multiplikation in der Potenz entsprach. Bringt man nun, rückwärts gehend, diese Beziehung zwischen der Bildung des Exponenten aus der Einheit und der Bildung der Potenz aus der Wurzel fortwährend in Anwendung; so erhält man die Glieder

$$a^3 = aaa,\ a^2 = aa,\ a^1 = a,\ a^0 = \frac{a}{a} = 1,$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a},\ a^{-2} = \frac{1}{aa},\ a^{-3} = \frac{1}{aaa} \text{ etc.}$$

Daß a^0 stets $= 1$ sei, welches auch der Werth der Wurzel a sei, kann nicht befremden, wenn man die obige Beziehung zwischen dem Bildungsgesetze des Exponenten und dem der Potenz, durch welche der Begriff der Addition und Subtraktion in den der Multiplikation und Division umgewandelt wird, ins Auge faßt. 0 ist keine Größe, ist Nichts, und wird demnach eine jede

Größe ungeändert lassen, mit welcher man sie durch Addition oder Subtraktion verbände; von ihr, als Gränze der positiven und negativen oder der Vermehrungs- und Verminderungszahlen ausgehend, muß erst eine beliebige Einheit, welche, als Zahl, durch 1 dargestellt wird, gesetzt werden, um alle ganzen Zahlen durch fortgesetzte Addition oder Subtraktion zu erzeugen — ebenso ist $a^0=1$, streng genommen, keine Potenz, und wird eine jede Größe ungeändert lassen, mit welcher man sie durch Multiplikation oder Division verbände; von ihr, als Gränze der Potenzen mit positiven und negativen Exponenten, welche resp. das Princip der Vervielfältigung und der Theilung beurkunden, ausgehend, muß ebenfalls erst eine beliebige Wurzel a gesetzt werden, um durch fortgesetzte Multiplikation oder Division die Reihe der ganzen Potenzen zu erzeugen.

Gehen wir jetzt zu dem Falle über, wo der Exponent eine gebrochene Zahl ist. Um alle gebrochenen Zahlen zu erzeugen, deren Nenner n ist, wurde die Einheit in n gleiche Theile getheilt; ein solcher Theil wurde alsdann als eine untergeordnete Einheit angesehen, um aus demselben nach demselben Gesetze der Addition oder Subtraktion, nach welchem die ganzen Zahlen entstanden, alle gebrochenen Zahlen vom Nenner n zu erzeugen. Das Kriterium des $n$ten Theiles der Einheit war zugleich, daß er nach $n$maliger Anwendung jenes Bildungsgesetzes oder nach $n$maliger Addition die Einheit selbst wiedererzeugte. Hieraus ist klar, daß die Potenz vom Exponenten $\frac{1}{n}$ eine solche sein muß, welche durch $n$maliges Setzen als Faktor die Wurzel a selbst wiedererzeugt. Diese Potenz wird demnach erhalten, wenn man die Wurzel a in n gleiche Faktoren zerlegt.

Ebenso sieht man ein, daß die Potenz vom Exponenten $\frac{m}{n}$, welcher durch $m$malige Addition des $n$ten Theiles der Einheit entstand, erhalten wird, wenn man die Wurzel a in n gleiche Faktoren zerlegt, und einen solchen Faktor $m$mal als Faktor setzt oder auf die $m$te Potenz erhebt.

Der Bruch $\frac{m}{n}$ kann aber auch dadurch entstanden gedacht werden, daß erst die Einheit $m$mal gezählt, und darauf die erhal-

tene Zahl in n gleiche Theile getheilt wurde. Hiernach könnte man ſich die Entſtehung der Potenz vom Exponenten $\frac{m}{n}$ auch auf die Weiſe vorſtellen, daß man erſt die Wurzel a $m$mal als Faktor ſetzte oder auf die $m$te Potenz erhöbe, und darauf dieſe Potenz in n gleiche Faktoren zerlegte.

Um die Übereinſtimmung der durch die beiden vorſtehenden Methoden erhaltenen Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ deutlich einzuſehen; ſo ſei nach der erſteren Methode x Einer der n gleichen Faktoren, in welche die Wurzel a zerlegt iſt, alſo

$$\underbrace{xx\ldots x}_{n}=a \text{ und } x=a^{\frac{1}{n}};$$

alsdann iſt

$$\underbrace{xx\ldots x}_{m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

Nach der letzteren Methode ſei y Einer der n gleichen Faktoren, in welche die $m$te Potenz von a, alſo $\underbrace{aa\ldots a}_{m}$ zerlegt iſt, ſodaß man

$$\underbrace{yy\ldots y}_{n}=\underbrace{aa\ldots a}_{m}$$

hat. Alsdann iſt auch $y=a^{\frac{m}{n}}$ die geſuchte Potenz, und es muß ſein

$$y=\underbrace{xx\ldots x}_{m}.$$

Setzt man nun, um die Richtigkeit der letzteren Gleichung einzuſehen, den Werth $\underbrace{xx\ldots x}_{n}$ für a in die Gleichung $\underbrace{yy\ldots y}_{n}=\underbrace{aa\ldots a}_{m}$; ſo erhält man

$$\underbrace{yy\ldots y}_{n}=(\overset{1}{\underbrace{xx\ldots x}_{n}})\,(\overset{2}{\underbrace{xx\ldots x}_{n}})\,(\overset{3}{\underbrace{xx\ldots x}_{n}})\;\ldots\ldots\;(\overset{m}{\underbrace{xx\ldots x}_{n}})$$

$$=\underbrace{xxx\ldots\ldots x}_{mn}$$

$$=(\overset{1}{\underbrace{xx\ldots x}_{m}})\,(\overset{2}{\underbrace{xx\ldots x}_{m}})\,(\overset{3}{\underbrace{xx\ldots x}_{m}})\;\ldots\ldots\;(\overset{n}{\underbrace{xx\ldots x}_{m}}).$$

Die beiden Größen auf der linken, wie auf der rechten Seite dieser Gleichung bestehen aus einem Produkte von n gleichen Faktoren, von denen der Faktor auf der linken Seite y und der auf der rechten Seite $\underbrace{(xx\ldots x)}_{m}$ ist. Es leuchtet ein, daß diese beiden Faktoren selbst einander gleich oder daß

$$y=\underbrace{xx\ldots x}_{m}$$

sein muß, wodurch der in Rede stehende Satz nachgewiesen ist.

Die Bedeutung der Potenzen mit negativen gebrochenen Potenzen ist nach dem Obigen von selbst klar. Wenn $a^{\frac{1}{n}}=x$, also $a^{\frac{m}{n}}=\underbrace{xx\ldots x}_{m}$ ist; so erhält man genau so, wie bei den Potenzen mit ganzen Exponenten, durch allmählige Subtraktion von $\frac{1}{n}$ im Exponenten und entsprechender Division mit x in der Potenz eine Reihe, von welcher

$$a^{\frac{3}{n}}=xxx,\ a^{\frac{2}{n}}=xx,\ a^{\frac{1}{n}}=x,\ a^{0}=1,$$

$$a^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{x},\ a^{-\frac{2}{n}}=\frac{1}{xx},\ a^{-\frac{3}{n}}=\frac{1}{xxx}$$

die den Übergang von den Potenzen mit positiven Exponenten zu den Potenzen mit negativen Exponenten darstellenden Glieder sind.

Wenn in dem Ausdrucke $a^{-m}=\frac{1}{a^{m}}$ der Exponent $m=\infty$, also auch a^{∞} unendlich groß wird; so wird $a^{-\infty}=\frac{1}{a^{\infty}}=0$.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich die allgemeinere Erklärung des Begriffes von Potenz: wie der Exponent durch Addition, Subtraktion und Theilung in aliquote Theile aus der positiven Einheit entsteht: so entsteht die Potenz resp. durch Multiplikation, Division und Zerlegung in gleiche Faktoren aus der Wurzel.

Man erkennt leicht, daß allgemein für positive, negative, ganze und gebrochene Werthe von m und n

$$a^m \times a^n = a^{m+n},\quad a^m : a^n = a^{m-n},$$
$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn},$$
$$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{m}} = a$$

ist.

§. 19. Wurzelausziehung.

Ihr Prinzip Trennung der durch Potenziirung entstandenen Verbindung, und demnach ihr Hauptcharakter Zerlegung in gleiche Faktoren. — Sie verlangt, daß man eine Zahl suche, welche, als Wurzel betrachtet, und zu derjenigen Potenz erhoben, die ihr Exponent vorschreibt, die gegebene Zahl hervorbringe. Demnach würde die Wurzel vom Grade m, $\frac{m}{n}$, $-\frac{m}{n}$ aus der Zahl a diejenige Zahl sein, welche, auf die Potenz m, $\frac{m}{n}$, $-\frac{m}{n}$ erhoben, den Werth a erzeugt.

Wenn man unter m eine jede beliebige Zahl versteht; so lehrt der allgemeine Ausdruck

$$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a,$$

daß diejenige Zahl, welche zur Potenz m erhoben, die Zahl a erzeugen soll, gleich der Potenz $\frac{1}{m}$ von dieser Zahl ist. Um demnach die $m$te Wurzel aus einer Zahl zu ziehen, hat man dieselbe zu einer Potenz zu erheben, deren Exponent $\frac{1}{m}$ oder das Umgekehrte des Wurzelexponenten ist.

Hiernach hat man

$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}},\quad \sqrt[\frac{1}{m}]{a} = a^m,$$

$$\sqrt[-m]{a} = a^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{m}}} = \sqrt[\frac{1}{m}]{\frac{1}{a}},\quad \sqrt[-\frac{1}{m}]{a} = a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

$$\sqrt[1]{a} = a,\quad \sqrt[0]{a} = \sqrt[\frac{1}{\infty}]{a} = a^\infty = \infty,$$

$$\sqrt[\infty]{a} = a^{\frac{1}{\infty}} = a^0 = 1.$$

Man sieht, daß der Akt der Wurzelausziehung schon bei dem

allgemeinen Falle der Potenziirung ausgeführt ist, und daß sämmtliche Wurzelgrößen auch als Potenzen derselben Größe dargestellt werden können.

§. 20. Bemerkungen über das Rechnen mit Exponentialgrößen.

Bei dem Rechnen mit Exponentialgrößen (Potenzen und Wurzelgrößen) muß man sich hüten, die allgemeinen Regeln der Addition und Multiplikation zu mißverstehen, um dieselben auf eine ihren Forderungen durchaus zuwiderlaufende Weise bei der Potenzbildung in Anwendung zu bringen. Bei der Erklärung der Addition heißt es ausdrücklich, die Erzeugung der Summe aus dem Einen Summand sei die Fortbildung desselben in der Reihe der unendlichen Zahlen nach dem einfachen Gesetze der Zählung, und bei der Multiplikation, das Produkt entstehe so aus dem Multiplikand, wie der Multiplikator durch das einfache Bildungsgesetz der gemeinen Zahlen (Theilung und Zählung), aus der Einheit entstanden sei. Man dürfte durchaus nicht so weit gehen, und bei der Addition eine Zahl nach einem anderen Gesetze, wie dem des einfachen Zählens weiterbilden, und bei der Multiplikation das Produkt nach einem Bildungsgesetze des Multiplikators erzeugen, welches von dem des einfachen Bildungsprinzipes der gemeinen Zahlen abwiche. In beiden Fällen dürfte also nicht etwa das Gesetz der Potenziirung, durch welches ebenfalls eine Größe nach einem bestimmten Rythmus gebildet werden kann, als Norm beim Weiterbilden durch Addition oder bei Erzeugung durch Multiplikation angesehen werden. So wäre es ganz irrig

$$a^3 + a^2 = a^5$$

zu setzen, indem man die Potenz $a^3 = aaa$ in der Reihe der Potenzen und nach deren eigenthümlichem Typus so lange fortbildete, bis sie eben so viel Faktoren enthielte, als a^3 und a^2 zusammengenommen, sodaß hierdurch $aaa + aa = aaaaa = a^5$ entstände.

Ebenso irrig wäre es, um b mit a^m zu multipliziren, folgende Schlußfolge anzunehmen: a^m ist aus der Einheit entstanden, indem die Einheit a mal genommen, und darauf das so erhaltene

Vielfache m mal als Faktor gesetzt oder auf die $m$te Potenz erhoben ist; demnach muß der Werth von $b \times a^m$ entstehen, indem b a mal, also ab, genommen, und dieses Vielfache m mal als Faktor gesetzt oder auf die $m$te Potenz erhoben wird. Dieser letzte Schluß würde das ganz falsche Resultat $b \times a^m = (ab)^m = a^m b^m$ erzeugen.

Da Subtraktion, Division und Wurzelausziehung immer auf einen Akt resp. der Addition, Multiplikation und Potenziirung zurückgeführt werden können; so leuchtet ein, daß bei den durch die ersteren Operationen zu erzeugenden Größen dieselben Einschränkungen gelten müssen, welche soeben hinsichtlich der letzteren bemerklich gemacht sind.

§. 21. Imaginäre Zahlen.

Aus §. 18 geht hervor, daß wenn die Zahl a positiv ist, eine jede Potenz derselben mit positivem oder negativem, ganzem oder gebrochenem Exponenten wiederum eine positive Zahl sein wird. Ist aber a eine negative Zahl; so wird irgend eine Potenz von ihr mit positivem oder negativem, aber ganzem Exponenten positiv sein, sobald der Exponent eine paare Zahl ist, und negativ, sobald der Exponent eine unpaare Zahl ist. Es ist nämlich, wenn n irgend eine positive ganze Zahl darstellt,

$$(-a)^{2n} = ((-a)^2)^n = (a^2)^n = a^{2n}$$

und

$$(-a)^{2n+1} = (-a)(-a)^{2n} = (-a)a^{2n} = -a^{2n+1}.$$

Wäre der Exponent $2n$ oder $(2n+1)$ negativ; so hat Dies auf das Zeichen der Potenz keinen Einfluß, da allgemein $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ist, und mithin die Potenzen mit negativen Exponenten dasselbe Zeichen erhalten werden, wie die gleichnamigen Potenzen mit positiven Exponenten.

Hieraus folgt, daß sich eine positive Zahl in eine jede, sowol paare, wie unpaare Anzahl gleicher Faktoren zerlegen lasse, und daß diese Faktoren sowol positiv, wie negativ genommen werden können, wenn ihre Anzahl paar ist, jedoch nur positiv, wenn ihre

Anzahl unpaar ist, daß sich dagegen eine negative Zahl nur in eine unpaare Anzahl gleicher Faktoren zerlegen lasse, welche immer negativ sind.

Bei der unbeschränkten Anwendung der Rechnung mit Exponentialgrößen fordert der Kalkul nun aber häufig, daß, um gewissen a priori gestellten Bedingungen zu genügen, eine negative Zahl in eine paare Anzahl gleicher Faktoren zerlegt oder daß aus derselben eine Wurzel von paarem Grade gezogen werden solle. Da einer solchen Forderung so wenig durch eine positive, wie durch eine negative Zahl ein Genüge geleistet werden kann; so nennt man dergleichen arithmetische Ausdrücke, welche die Ausführung einer Operation der vorstehenden Art verlangen, und welche sich in der allgemeinen Form

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a}\,\sqrt[2n]{-1} \text{ oder } (-a)^{\frac{1}{2n}} = (-1)^{\frac{1}{2n}}\, a^{\frac{1}{2n}}$$

darstellen, imaginäre Zahlen.

§. 22. Logarithmen.

Wenn man in der unbegränzten Reihe

$$\ldots\ a^{-3n}\quad a^{-2n}\quad a^{-n}\quad a^{0}\quad a^{n}\quad a^{2n}\quad a^{3n}\ \ldots$$

der Zahl a irgend einen bestimmten positiven Werth gibt; so wird man durch die einzelnen Glieder derselben alle gegebenen positiven Zahlen als Potenzen jener Zahl darstellen können, sobald man nur den Unterschied zwischen den Exponenten zweier aufeinander folgender Glieder, d. h. den Werth von n, klein genug annimmt. Wenn $a > 1$ ist; so werden die positiven Potenzen von a allen positiven Zahlen entsprechen, welche größer sind, als 1, während die negativen Potenzen von a allen positiven echten Brüchen entsprechen. Wäre dagegen $a < 1$; so würden die positiven Potenzen den echten Brüchen und die negativen Potenzen den Zahlen angehören, welche > 1 sind.

Die Kenntniß der verschiedenen Exponenten, welche die Potenzen bezeichnen, zu denen Ein und dieselbe Zahl a erhoben werden müßte, um alle positiven Zahlen zu erzeugen, würde bei dem Rechnen mit Letzteren manche Bequemlichkeit herbeiführen.

Namentlich würden die Operationen der Multiplikation, Division, Potenziirung und Wurzelausziehung hierdurch eine bedeutende Abkürzung erleiden; denn wenn irgend zwei gegebene Zahlen c und d resp. $= a^r$ und a^s wären; so würde

$$cd = a^r a^s = a^{r+s},\ \frac{c}{d} = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s},$$

$$c^m = (a^r)^m = a^{rm},\ \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{a^r} = a^{\frac{r}{m}}$$

sein. Kennte man nun die Exponenten r und s, und wären außerdem alle Zahlen bekannt, welche beliebigen gegebenen Potenzen von a entsprächen; so würde man behuf Ausführung der Multiplikation oder Division der beiden Zahlen c und d nur die Exponenten r und s zu addiren oder zu subtrahiren brauchen, um alsdann in der tabellarischen Zusammenstellung der Zahlen mit den ihnen entsprechenden Exponenten diejenige Zahl aufzusuchen, welche resp. dem Exponenten $r+s$ oder $r-s$ entspräche. Ebenso würde die Operation der Potenziirung oder Wurzelausziehung an einer Zahl c auf einen bloßen Akt der Multiplikation oder Division des derselben angehörigen Exponenten r hinauslaufen.

Der Werth der Zahl a, als deren Potenzen man die verschiedenen Zahlen darstellt, ist offenbar gleichgültig; nur ist es erforderlich, daß dieselbe positiv sei, weil die sukzessiven Potenzen einer negativen Zahl bald positiv, bald negativ, bald imaginär sein würden.

Wenn man die Zahlen als Potenzen irgend einer gegebenen Zahl a in der obigen Weise systematisch darzustellen beabsichtigt, nennt man die Exponenten r und s die Logarithmen der zugehörigen Zahlen c und d. Die Zahl a, welche allen diesen Potenzen als gemeinschaftliche Wurzel unterliegt, heißt die Grundzahl oder Basis des Logarithmensystemes.

Nach Obigem hat man also

$$\log(cd) = \log c + \log d,\ \log\frac{c}{d} = \log c - \log d,$$

$$\log c^m = m\log c,\ \log\sqrt[m]{c} = \frac{1}{m}\log c.$$

Da alle poſitiven Logarithmen den poſitiven Zahlen angehören, welche größer ſind, als 1 (ſobald die Grundzahl $a>1$ iſt) und alle negativen Logarithmen den poſitiven echten Brüchen entſprechen; ſo folgt, daß der Logarithmus einer negativen Zahl weder poſitiv, noch negativ ſein kann. Arithmetiſche Ausdrücke von der Form

$$\log(-c)=\log(-1.c)=\log c+\log(-1)$$

gehören alſo ebenfalls in das Bereich der imaginären Zahlen. Damit iſt jedoch nicht geſagt, daß ſich dieſe Größen immer unter die Form der in §. 21 betrachteten imaginären Zahlen bringen ließen; beide Klaſſen fordern nur die Herſtellung einer Zahl, welche ſowenig in der Reihe der poſitiven, wie der negativen Zahlen liegen kann. —

Da bei den ſpäteren Unterſuchungen die Zahlen in ihren allgemeinſten Geſtalten betrachtet werden ſollen, worunter die imaginären Formen gleichfalls zu rechnen ſind; ſo mögen hier noch die allgemeinen Entwickelungen einiger Formeln folgen, welche jenen Unterſuchungen zur Grundlage dienen werden.

§. 23. Der binomiſche Lehrſatz.

Wenn n eine poſitive ganze Zahl bezeichnet; ſo iſt leicht zu zeigen, daß ſich die $n$te Potenz des Binoms $a+b$ in eine Reihe von der Form

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\text{etc.}$$

entwickeln läßt. Das Geſetz, nach welchem dieſe Reihe fortſchreitet, iſt leicht zu überſehen; die wichtigſten Momente dabei ſind, daß die einzelnen Glieder aus drei Faktoren beſtehen, von denen der Eine die ſukzeſſiv um Eine Einheit wachſenden ganzen Potenzen des Theiles b, der andere die ſukzeſſiv um Eine Einheit abnehmenden Potenzen des Theiles a, von der $n$ten Potenz, als erſtes Glied, anfangend, und der dritte Faktor eine Zahl darſtellt, welche ſich aus dem entſprechenden Faktor des vorhergehenden Gliedes nach einem beſtimmten Geſetze bildet, von den Werthen der Theile a und b des Binomes aber ganz unabhängig iſt.

Wenn nun n eine poſitive ganze Zahl iſt; ſo bricht die vorſtehende Reihe mit dem $(n+1)$ſten Gliede vollſtändig ab, während alle ſpäteren Glieder, welche man nach dem obigen Geſetze bilden wollte, gleich null werden würden.

Es kommt jetzt darauf an, zu zeigen, daß das vorſtehende Entwickelungsgeſetz der $n$ten Potenz irgend eines Binoms $a+b$ auch dann Richtigkeit behält, wenn man ſich unter n eine jede beliebige poſitive, negative oder imaginäre Zahl denkt.

Zu dieſem Ende muß folgender Satz vorausgeſchickt werden: Wenn x eine Zahl bezeichnet, welche einen jeden beliebig zu wählenden Werth annehmen kann, und es wird gefordert, daß die beiden Ausdrücke oder Funktionen von x

$$a_0+a_1x^\alpha+a_2x^\beta+a_3x^\gamma+\ldots \text{ und}$$
$$b_0+b_1x^\alpha+b_2x^\beta+b_3x^\gamma+\ldots,$$

deren einzelne Glieder in dieſelben Potenzen der Veränderlichen x und außerdem in gewiſſe konſtante, von x unabhängige Zahlen $a_0, a_1, a_2 \ldots, b_0, b_1, b_2$ (von denen die Eine oder andere auch gleich null ſein kann) multiplizirt ſind, für alle möglichen Werthe von x ſtets dasſelbe Reſultat liefern; ſo müſſen die in gleiche Potenzen von x multiplizirten konſtanten Koeffizienten der beiden Ausdrücke einander gleich ſein.

Denn ſetzt man zuvörderſt $x=0$; ſo reduziren ſich jene beiden Funktionen reſp. auf a_0 und b_0, und da dieſelben auch für dieſen Werth von x Ein und dasſelbe Reſultat ergeben ſollen; ſo folgt, daß

$$a_0=b_0$$

ſein müſſe. Führt man dieſe Bedingung in die gegebenen beiden Funktionen ein; ſo zeigt ſich, daß für alle möglichen Werthe von x auch

$$a_1x^\alpha+a_2x^\beta+a_3x^\gamma+\ldots=b_1x^\alpha+b_2x^\beta+b_3x^\gamma+\ldots,$$

oder daß

$$x^\alpha(a_1+a_2x^{\beta-\alpha}+a_3x^{\gamma-\alpha}+\ldots)=x^\alpha(b_1+b_2x^{\beta-\alpha}+b_3x^{\gamma-\alpha}+\ldots)$$

oder auch, daß

$$a_1+a_2x^{\beta-\alpha}+a_3x^{\gamma-\alpha}+\ldots=\frac{x^\alpha}{x^\alpha}(b_1+b_2x^{\beta-\alpha}+b_3x^{\gamma-\alpha}+\ldots)$$

ſein müſſe.

Jetzt leuchtet ein, daß man für x einen so kleinen Werth substituiren könne, daß alle Potenzen von x gegen die beiden konstanten Zahlen a_1 und b_1 verschwindend klein werden. Dabei bleibt der Faktor $\frac{x^\alpha}{x^\alpha}$ auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung stets $=1$, und muß diesen Werth auch dann noch beibehalten, wenn die Größe x im Augenblicke des Verschwindens gedacht wird, wo alle übrigen in Potenzen von x multiplizirten Glieder im Begriffe sind, gleich null, und die beiden Reihen der obigen Gleichung resp. gleich a_1 und b_1 zu werden. Die Gränzen, welcher die beiden Seiten jener Gleichung bei fortwährender Abnahme des Werthes von x entgegenstreben, und welche dieselben vollkommen erreichen werden, wenn man $x=0$ setzt, sind also resp. a_1 und b_1. Die nothwendige Gleichheit dieser beiden Gränzen fordert demnach, daß auch die beiden Koeffizienten a_1 und b_1 einander gleich seien.

Aus der Gleichung von a_1 und b_1 folgt alsdann ferner, daß auch

$$a_2 x^\beta + a_3 x^\gamma + \ldots = b_2 x^\beta + b_3 x^\gamma + \ldots$$

sein müsse, und ein in der vorstehenden Weise fortgesetztes Schlußverfahren führt zu dem Endresultate, daß alle in gleich hohe Potenzen von x multiplizirten Koeffizienten der beiden gegebenen Funktionen einander gleich sein müssen.

Wenn die beiden Ausdrücke, welche stets einander gleich sein sollen, nicht bloß als Funktionen einer einzigen Veränderlichen x, sondern als Funktionen mehrerer Veränderlichen $x, y, z \ldots$, gegeben sind; so findet man leicht, daß alsdann alle diejenigen Koeffizienten der beiden Funktionen einander gleich sein müssen, welche in dieselben Verbindungen gleicher Potenzen von $x, y, z \ldots$ multiplizirt sind, sodaß wenn z. B. in der Einen das Glied $ax^\alpha y^\beta z^\gamma$ und in der anderen das Glied $bx^\alpha y^\beta z^\gamma$ vorkäme, $a=b$ sein müßte.

Kehren wir jetzt zu der obigen Entwickelung der Potenz $(a+b)^n$ zurück, und nehmen wir an, die $n$te Potenz des Binoms $a+x$, in welchem x einen jeden beliebigen Werth erhalten könne, lasse sich immer, welches auch der Werth von n sei, in eine Reihe von der Form

$$(a+x)^n = a^n + A_1 a^{n-1}x + A_2 a^{n-2}x^2 + \ldots + A_r a^{n-r}x^r + \ldots . \text{(a)}$$

entwickeln, in welcher die Koeffizienten $A_1, A_2, A_3 \ldots$ durchaus von x und a unabhängig und nur Funktionen des Exponenten n ſind, ſodaß dieſelben ungeändert bleiben, welche Werthe man auch für x in die vorſtehende Gleichung einführen möge. Um das Bildungsgeſetz jener Koeffizienten zu entdecken, laſſe man mit Burg (Lehrbuch der höheren Mathematik, §. 16) x um irgend eine Größe y zu nehmen; alsdann geht die vorſtehende Gleichung über in

$$(a+x+y)^n = a^n + A_1 a^{n-1}(x+y) + A_2 a^{n-2}(x+y)^2 + \ldots + A a^{n-r}(x+y)^r + \ldots . \text{(b)}$$

Subſtituirt man jedoch in Gleichung (a) $\frac{x}{y}$ für x; ſo erhält man

$$\left(a+\frac{x}{y}\right)^n \text{ oder } \frac{(ay+x)^n}{y^n}$$

$$= a^n + A_1 a^{n-1}\frac{x}{y} + A_2 a^{n-2}\frac{x^2}{y^2} + \ldots + A_r a^{n-r}\frac{x^r}{y^r} + \ldots,$$

oder wenn man mit y^n multiplizirt,

$$(ay+x)^n = a^n y^n + A_1 a^{n-1} y^{n-1} x + A_2 a^{n-2} y^{n-2} x^2 + \ldots + A_r a^{n-r} y^{n-r} x^r + \ldots,$$

und wenn man in dieſer Gleichung $\frac{a+y}{a}$ an die Stelle von y ſetzt,

$$(a+x+y)^n = (a+y)^n + A_1 (a+y)^{n-1}x + A_2 (a+y)^{n-2}x^2 + \ldots + A_r (a+y)^{n-r}x^r + \ldots . \text{(c)}$$

Nach Gleichung (a) hat man nun ferner, da die Koeffizienten $A_1, A_2, A_3 \ldots$ nur vom Exponenten n abhängig ſind,

$$(a+y)^n = a^n + A_1 a^{n-1}y + A_2 a^{n-2}y^2 + A_3 a^{n-3}y^3 + \ldots,$$
$$(a+y)^{n-1} = a^{n-1} + B_1 a^{n-2}y + B_2 a^{n-3}y^2 + B_3 a^{n-4}y^3 + \ldots,$$
$$(a+y)^{n-2} = a^{n-2} + C_1 a^{n-3}y + C_2 a^{n-4}y^2 + C_3 a^{n-5}y^3 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a+y)^{n-r} = a^{n-r} + R_1 a^{n-r-1}y + R_2 a^{n-r-2}y^2 + R_3 a^{n-r-3}y^3 + \ldots$$

Es leuchtet ein, daß allgemein die Koeffizienten $R_1, R_2, R_3 \ldots$ reſp. aus den Koeffizienten $A_1, A_2, A_3 \ldots$ erhalten werden müſſen, wenn man in dieſen $n-r$ an die Stelle von n ſetzt.

Subſtituirt man die vorſtehenden Werthe in die Gleichung (c), ſetzt darauf die rechten Seiten der beiden Gleichungen (b) und (c) einander gleich; ſo erhält man, wenn man nach der bekannten Regel die poſitiven ganzen Potenzen des Binoms $(x+y)$ in der Gleichung (b) entwickelt, und dieſe Entwickelungen nur bis zu den zweiten Gliedern der dadurch entſtehenden Reihen fortſetzt, was für den vorliegenden Zweck hinreichend iſt,

$$a^n + A_1 a^{n-1} x + A_2 a^{n-2} x^2 + A_3 a^{n-3} x^3 + \ldots + A_r a^{n-r} x^r + \ldots$$
$$+ A_2 a^{n-1} y + 2A_2 a^{n-2} xy + 3A_3 a^{n-3} x^2 y + \ldots + rA_r a^{n-r} x^{r-1} y + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= a^n + A_1 a^{n-1} y + A_2 a^{n-2} y^2 + A_3 a^{n-3} y^3 + \ldots$$
$$+ A_1 x(a^{n-1} + B_1 a^{n-2} y + B_2 a^{n-3} x^2 + \ldots)$$
$$+ A_2 x^2 (a^{n-3} + C_1 a^{n-3} y + C_2 a^{n-4} y^2 + \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A_{r-2} x^{r-2} (a^{n-r+2} + P_1 a^{n-r+1} y + P_2 a^{n-r} y^2 + \ldots)$$
$$+ A_{r-1} x^{r-1} (a^{n-r+1} + Q_1 a^{n-r} y + Q_2 a^{n-r-1} y^2 + \ldots)$$
$$+ A_r x^r (a^{n-r} + R_1 a^{n-r-1} y + R_2 a^{n-r-2} y^2 + \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da nun die Koeffizientin $A_1, A_2 \ldots, B_1, B_2 \ldots, C_1, C_2, \ldots$ etc. von x und y unabhängige Größen ſind, die vorſtehende Gleichung aber für jede beliebige Werthe von x und y Gültigkeit behalten muß; ſo folgt nach dem im Anfange dieſes Paragraphes nachgewieſenen Satze, daß die in gleiche Verbindungen von x und y multiplizirten Koeffizienten auf beiden Seiten der obigen Gleichung einander gleich ſein müſſen. Setzt man demnach diejenigen Koeffizienten, welche in die erſte Potenz von z und die ſukzeſſiv höheren Potenzen von x multiplizirt ſind, einander gleich (da die übrigen Glieder auf identiſche Gleichungen führen); ſo erhält man

$$2A_2 = A_1 B_1, \text{ und daraus } A_2 = \frac{A_1 B_1}{1.2},$$

$$3A_3 = A_2 C_1, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad A_3 = \frac{A_2 C_1}{3} = \frac{A_1 B_1 C_1}{1.2.3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$rA_r = A_{r-1} Q_1$, und daraus $A_r = \frac{A_{r-1} Q_1}{r}$.

Hieraus erſieht man, daß wenn das Bildungsgeſetz der erſten beiden Koeffizienten A_2 und A_3 allgemein bis zum Koeffizienten A_{r-1} gilt, ſodaß $A_{r-1} = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots P_1}{1.2.3 \ldots (r-1)}$ iſt, alsdann auch der Koeffizient $A_r = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots P_1 Q_1}{1.2.3 \ldots r}$ ſein und dasſelbe Bildungsgeſetz beurkunden wird. Da dieſes Geſetz nun für den Werth $r-1=3$ nachgewieſen iſt; ſo folgt, daß dasſelbe auch für jeden höheren Werth von $r-1$ oder für alle Koeffizienten $A_1, A_2, A_3 \ldots$ Gültigkeit haben muß.

Durch Subſtitution der vorſtehenden Werthe für $A_1, A_2, \ldots$ in die Gleichung (a) verwandelt ſich dieſelbe in

$$(a+x)^n = a^n + A_1 a^{n-1} x + \frac{A_1 B_1}{1.2} a^{n-2} x^2 + \frac{A_1 B_1 C_1}{1.2.3} a^{n-3} x^3 + \ldots$$

$$+ \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots Q_1}{1.2.3 \ldots r} a^{n-r} x^r + \ldots . \text{(d)}$$

Da man nach dem Obigen die Werthe der Koeffizienten $B_1, C_1 \ldots Q_1$ aus dem Koeffizienten A_1 erhält, wenn man in letzterem reſp. $n-1, n-2, \ldots n-(r-1)$ an die Stelle von n ſetzt; ſo kommt es jetzt nur noch darauf an, den Werth von A_1 zu beſtimmen. Zu dieſem Behufe drücke man durch

$$A_1 = f(n)$$

aus, daß A_1 irgend eine Funktion des Exponenten n ſei. Alsdann hat man nach Gleichung (a)

$(a+x)^n = a^n + a^{n-1} x f(n) + \ldots$ und in ähnlicher Weiſe

$(a+x)^m = a^m + a^{m-1} x f(m) + \ldots$, ſowie auch

$(a+x)^{m+n} = a^{m+n} + a^{m+n-1} x f(m+n) + \ldots$

Nun iſt aber auch

$$(a+x)^{m+n} = (a+x)^m (a+x)^n \text{ ; mithin}$$

$$a^{m+n} + a^{m+n-1} x f(m+n) + \ldots = [a^m + a^{m-1} x f(m) + \ldots] \times$$

$$[a^n + a^{n-1} x f(n) + \ldots] = a^{m+n} + a^{m+n-1} x [f(m) + f(n)] + \ldots,$$

und daher, da $f(m)$, $f(n)$ und $f(m+n)$ von x ganz unabhängig ſind,

$$f(m+n)=f(m)+f(n).$$

Da dieſe Beziehung für alle Werthe ſtattfinden muß, welche man möglicher Weiſe für m und n darin ſubſtituiren könnte; ſo folgt, wenn man reſp. $m=n, =2n, \ldots=(p-1)n$ ſetzt, daß

$$f(2n)=2f(n),$$
$$f(3n)=3f(n),$$

und allgemein, daß

$$f(pn)=pf(n),$$

oder wenn man mit pn dividirt, daß

$$\frac{f(n)}{n}=\frac{f(pn)}{pn}$$

ſein müſſe. Aus dieſer Beziehung geht hervor, daß der Werth des Quotienten $\frac{f(n)}{n}$ durchaus keine Änderung erleiden dürfe, welches Vielfache von n man auch für dieſe Größe ſubſtituiren möge. Man ſieht alſo, daß jener Quotient einen *konſtanten*, *von n unabhängigen* Werth haben muß. Setzt man denſelben demnach

$$\frac{f(n)}{n}=\mathrm{A}, \text{ mithin } f(n)=n\mathrm{A};$$

ſo hat man

$$(a+x)^n=a^n+n\mathrm{A}a^{n-1}x+\ldots$$

Da A von n unabhängig iſt; ſo kann man zur Beſtimmung desſelben in der vorſtehenden Gleichung für n jeden beliebigen Werth einführen. Setzt man demnach einfach $n=1$; ſo reduzirt ſich dieſe Gleichung auf

$$a+x=a+\mathrm{A}x,$$

und da A auch von der veränderlichen Größe x ganz unabhängig iſt; ſo folgt, daß

$A=1$, alſo $f(n)=n$, und mithin

$$A_1=n$$

ſein müſſe. Da man hiernach $B_1=n-1$, $C_1=n-2,\ldots$ $Q_1=n-(r-1)$ hat; ſo nimmt die Formel (d) die Geſtalt

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}x^3+\ldots\text{(e)}$$

an.

In dem durch dieſe Formel dargeſtellten Geſetze, nach welchem ſich irgend eine Potenz des Binoms $a+x$ in eine Reihe entwickelt, deren einzelne Glieder nach den ſukzeſſiven Potenzen von a und x fortſchreiten, beſteht der binomiſche Lehrſatz.

Wenn man beide Seiten der vorſtehenden Gleichung durch a^n dividirt, und alsdann für die Größe $\frac{x}{a}$ wiederum das Zeichen x einführt; ſo erhält man, da $\frac{(a+x)^n}{a^n}=\left(\frac{a+x}{a}\right)^n=\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ iſt,

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\ldots\text{(f)}$$

§. 24. Die Exponentialreihe.

Bei der vorſtehenden Unterſuchung wurde verlangt, irgend eine Potenz einer zweitheiligen Größe in eine ſolche Reihe zu entwickeln, deren einzelne Glieder in Potenzen der beiden Theile des Binoms multiplizirt waren; jetzt kommt es darauf an, die Potenz a^x irgend einer Größe a durch eine ſolche Reihe darzuſtellen, deren Glieder nach den ſukzeſſiven Potenzen des Exponenten x fortſchreiten. Setzt man zu dieſem Ende $a=1+b$; ſo hat man nach der letzten Gleichung (f)

$$a^x=(1+b)^x=1+xb+\frac{x(x-1)}{1.2}b^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}b^3+\ldots.$$

$$+\frac{x(x-1)\ldots(x-r+1)}{1.2\ldots.r}b^r+\ldots$$

$$=1+\left(1.b-\tfrac{1}{2}b^2+\frac{-1.-2}{2.3}b^3+\frac{-1.-2.-3}{2.3.4}b^4+\ldots+\frac{-1.-2\ldots-(r-1)}{2.3\ldots r}b^r\right)x$$
$$+B_2x^2+B_3x^3+\ldots$$
$$=1+\left(b-\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{3}b^3-\tfrac{1}{4}b^4+\ldots\pm\frac{1}{r}b^r\mp\ldots\right)x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots$$

Setzt man jetzt

$$b-\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{3}b^3-\tfrac{1}{4}b^4+\ldots$$
$$=(a-1)-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3-\tfrac{1}{4}(a-1)^4+\ldots\pm\frac{1}{r}(a-1)^r\mp\ldots=A_1;\ldots(g)$$

so wird die vorstehende Gleichung

$$a^x=1+A_1x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots+B_rx^r+\ldots(h)$$

Ebenso wird man haben, wenn man $x=y+z$ setzt, da die Koeffizienten $A_1, B_2, B_3\ldots$ von dem Exponenten x unabhängig sind,

$$a^{y+z}=1+A_1(y+z)+B_2(y+z)^2+B_3(y+z)^3+\ldots+B_r(y+z)^r+\ldots$$
$$=(1+A_1y+B_2y^2+B_3y^3+\ldots)+(A_1+2B_2y+3B_3y^2+\ldots)z$$
$$+Pz^2+Qz^3+\ldots;(i)$$

aber auch

$$a^{y+z}=a^y\,a^z=(1+A_1y+B_2y^2+B_3y^3+\ldots+B_ry^r+\ldots)$$
$$\times(1+A_1z+B_2z^2+B_3z^3+\ldots+B_rz^r+\ldots)$$
$$=(1+A_1y+B_2y^2+B_3y^3+\ldots)$$
$$+(A_1+A_1A_1y+A_1B_2y^2+A_1B_3y^3+\ldots)z+Rz^2+Sz^3+\ldots(k)$$

Setzt man nun zuvörderst die Faktoren der in gleiche Potenzen von z multiplizirten Glieder der beiden Gleichungen (i) und (k) einander gleich, da dieselben von z ganz unabhängig sind; so erhält man

$$A_1+2B_2y+3B_3y^2+\ldots+rB_ry^{r-1}+\ldots$$
$$=A_1+A_1A_1y+A_1B_2y^2+A_1B_3y^3+\ldots+A_1B_{r-1}y^{r-1}+\ldots$$

Da in dieser Gleichung die Koeffizienten $A_1, B_2, B_3,\ldots$ von y unabhängig sind; so muß man ferner haben

$$A_1=A_1,$$

$$B_2=\frac{A_1^2}{2},$$

$$B_3=\frac{A_1B_2}{3}=\frac{A_1^3}{2.3},$$

$$B_4=\frac{A_1B_3}{4}=\frac{A_1^4}{2.3.4},$$

. . . . . .

$$B_r=\frac{A_1B_{r-1}}{r}=\frac{A_1^r}{2.3\ldots r},$$

und daher wegen Gleichung (h)

$$a^x=1+A_1x+\frac{A_1^2}{2}x^2+\frac{A_1^3}{2.3}x^3+\ldots+\frac{A_1^r}{2.3\ldots r}x^r+\ldots., \text{(l)}$$

eine Formel, worin

$$A_1=(a-1)-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3-\tfrac{1}{4}(a-1)^4+\ldots\pm\frac{1}{r}(a-1)^r\mp\ldots \text{(g)}$$

iſt.

In der vorſtehenden Formel beſteht die ſogenannte Exponentialreihe, welche wegen der Allgemeinheit des binomiſchen Lehrſatzes, aus welchem dieſelbe hergeleitet iſt, für alle möglichen Werthe des Exponenten x Gültigkeit hat.

Wenn man in dieſer Reihe $A_1=1$ ſetzt, und den Werth von a, welcher dieſer Bedingung in der Beziehung (g) entſpricht, mit e bezeichnet; ſo hat man

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\ldots+\frac{x^r}{2.3\ldots r}+\ldots. \text{(m)}$$

Der Zahlwerth der Größe e ergibt ſich, wenn man in der letzteren Gleichung $x=1$ ſetzt; Dies gibt

$$e=1+1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots=2{,}718281828\ldots \quad \ldots\text{(n)}$$

§. 25. Die logarithmiſche Reihe.

Wenn a die Baſis irgend eines künſtlichen Logarithmenſyſtemes iſt; ſo hat man, wenn $a^x=y$ iſt,

$$x = \text{log. artificialis } y = \text{log. art. } y.$$

Es wird jetzt verlangt, den Werth von log. art. y in eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe zu entwickeln. Zu diesem Zwecke setze man

$$a^{xz} = y^z.$$

Nach der Formel (l) hat man nun

$$a^{xz} = 1 + A_1 xz + \ldots \text{ und}$$
$$y^z = 1 + \alpha_1 z + \ldots,$$

worin

$$A_1 = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots \text{ und}$$
$$\alpha_1 = (y-1) + \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \tfrac{1}{4}(y-1)^4 + \ldots$$

ist.

Da die vorstehenden beiden Reihen für a^{xz} und y^z einander gleich sein müssen, und die Koeffizienten der in z multiplizirten Glieder von der veränderlichen Größe z unabhängig sind; so muß man haben

$$A_1 x = \alpha_1, \text{ also}$$
$$x = \frac{\alpha_1}{A_1} = \frac{1}{A_1}[(y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots],$$

d. i., wenn man

$$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{(a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots} = M \ldots . (o)$$

setzt, und beachtet, daß $x = \log \text{art} y$ ist,

$$\text{log. art. } y = M[(y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \tfrac{1}{4}(y-1)^4 + \ldots], \quad (p)$$

und auch, wenn man $1+y$ für y substituirt,

$$\text{log. art.}(1+y) = M(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \ldots) \quad \ldots (q)$$

In dieser Formel besteht die logarithmische Reihe. Die Zahl M heißt der Model des Logarithmensystemes von der Basis a.

Wenn man $a = e$ setzt (s. den vorhergehenden Paragraph) so wird $A_1 = 1$, und mithin auch $M = \frac{1}{A_1} = 1$. Die für die Basis e berechneten Logarithmen heißen natürliche; ihr allgemeiner Ausdruck ist log. naturalis $(1+y)$ oder einfach

$$\log(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \ldots (r)$$

Wenn man in der vorstehenden Formel $y=a-1$ setzt; so folgt

$$\log a=(a-1)-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3-\tfrac{1}{4}(a-1)^4+\ldots$$

Nach Gleichung (g) ist also $A_1=\log a$, und man hat, wenn man diesen Werth von A_1 in die Exponentialreihe (l) einführt,

$$a^x=1+x\log a+x^2\frac{\log^2 a}{2}+x^3\frac{\log^3 a}{2.3}+\ldots. \quad (s)$$

§. 26. Konvergenz und Divergenz der Reihen.

Man bemerkt, daß die in den drei letzteren Paragraphen entwickelten Reihen ins Unendliche fortlaufen, und daß nur die binomische Reihe (e) oder (f) mit dem $(n+1)$ten Gliede abbricht, sobald n eine positive ganze Zahl ist. Sollen diese Reihen demnach zur Berechnung der Funktionen dienen, deren Entwickelungen sie sind; so ist es erforderlich, daß der Fehler, welchen man begeht, wenn man diese Reihen mit einer endlichen Anzahl ihrer ersteren Glieder abbricht, immer kleiner werde, je größer die Anzahl der in Rechnung genommenen Glieder ist. Es ist aber nicht hinreichend, daß dieser Fehler mit dem Abbruche der Reihe bei einem späteren Gliede überhaupt nur kleiner ausfalle, als mit dem Abbruche bei einem früheren Gliede; derselbe muß vielmehr fähig sein, bei einer genügend großen Anzahl berechneter Glieder unter jeden beliebigen Werth herabzusinken, sodaß sich derselbe fortwährend der Gränze o nähert, und dieselbe vollkommen erreichen würde, wenn man die Rechnung ins Unendliche fortsetzte. Eine Reihe, deren Glieder der letzteren Bedingung ein Genüge leisten, heißt *konvergent*; wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, heißt die Reihe *divergent*.

Man kann nachweisen, daß die binomische Reihe oder die Entwickelung der Größe $(1+x)^{n-1}$ für solche Werthe von x konvergirt, welche zwischen -1 und $+1$ liegen. Die Exponentialreihe (m) für e^x konvergirt dagegen für alle positiven und negativen Werthe von x. Die logarithmische Reihe (r) für $\log(1+y)$ konvergirt für alle positiven und negativen echten Brüche und für $y=+1$.

Zweiter Abschnitt.

Erweiterung der arithmetischen Begriffe.

§. 27. Allgemeine Bestimmung und Gegenstand der Arithmetik.

Es ist schon oben angeführt, daß es sich die Arithmetik zur Aufgabe macht, die Beziehungen, in welchen verschiedene Größen zueinander stehen, denken zu lehren, die Veränderungen, welche jene Größen unter der Herrschaft irgend eines nothwendigen Bildungsgesetzes erleiden, auf abstraktem Wege zu entwickeln, ohne sich dabei der Beihülfe einer bildlichen oder überhaupt sinnlichen Darstellungsweise zu bedienen. Die Hauptmerkmale nun, welche die Größen zu einer mathematischen Betrachtung geeignet machen, sind 1) die Quantität oder Vielheit der Theile; und 2) die Form oder Anordnung der Theile oder auch die Richtung, in welcher sich das Ganze aus dem einfachen Theile herausgebildet hat. Von diesen beiden Attributen aller Größen ist die Quantität das wichtigere und dasjenige, welches sich von dem Wesen einer Größe durch Abstraktion nicht trennen läßt, ohne daß dieselbe aufhöre, Gegenstand einer mathematischen Untersuchung zu sein. Die Form oder die Art der Anordnung der Theile zu einem Ganzen hat in manchen Fällen eine untergeordnetere Bedeutung; wir machen uns zuweilen von der Betrachtung derselben ganz los, und fordern, daß sie als unwesentliches Element vernachlässigt werde, indem wir bestimmen, daß gewisse Größen einzig und allein ihrer Quantität nach in Betracht gezogen werden sollen (s. weiter unten §. 55 ff.) Den Größen, welchen Quantität als unveräußerliches Merkmal zukommt, fehlt auch niemals die Eigenschaft der unendlichen Theilbarkeit oder der Stetigkeit ihrer Theile. Jedoch auch von diesem Naturgesetze weiß der menschliche Geist unter Umständen zu abstrahiren, und

Größen zu fingiren, bei denen der Begriff der Stetigkeit ganz in den Hintergrund tritt, indem gewisse Theile jener Größen, welche in der That immer noch zusammengesetzt sind, als einfach und untheilbar gedacht werden, sodaß mit einer ferneren Theilung derselben die Idee ihrer Existenz aufgehoben wird. (s. §. 55 ff.)

Am vollkommensten werden die vorstehenden Eigenschaften bei den räumlichen Größen gewürdigt. Bei den zeitlichen Größen behalten wir zwar den Begriff der Quantität und Stetigkeit unverletzt, die Anordnung der Theile beschränkt sich jedoch nur auf das Aneinanderfügen derselben in einer einzigen (geradlinigen) Richtung. Bei den eigentlichen Vielheits- oder diskreten Größen, z. B. bei einer Anzahl von Menschen, bei einer Anzahl von günstigen oder ungünstigen Ereignissen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung u. s. w., suchen wir nicht bloß den Begriff der Richtung, in welcher sich das Ganze aus dem einfachen Theile gebildet hat, sondern auch den der Stetigkeit zu verdrängen, indem wir aus der unendlichen Reihe aller gleichartigen Größen solche, als den gemachten Anforderungen nicht entsprechend, hinausstoßen, welche nicht ein genaues Vielfaches der als einfach angenommenen Einheit sind (s. §. 58 ff.).

Da bei den räumlichen Größen die Idee von Form und von Stetigkeit die größte Wichtigkeit gewinnt, und alle übrigen Größen, bei denen diese Eigenschaften als unwesentlich vernächlässigt werden, in den allgemeineren Fällen der Raumgrößen mit enthalten sind, sodaß sich die Bildungs- und Veränderungsgesetze der ersteren durch leicht zu machende Einschränkungen aus denen der letzteren unmittelbar ableiten lassen; so brauchen wir eigentlich nur die Methoden zu betrachten, welche die Mathematik wählt, um die Beziehungen zu entwickeln, in welchen die Raumgrößen unter dem allgemeinsten Gesichtspunkte der Quantität und Form zueinander stehen.

Der Geometrie, welche die Größen selbst bildlich im Raume darstellt, wird es leicht, neben den quantitativen auch diejenigen Verhältnisse anschaulich zu machen, welche zwischen den räumlichen Größen hinsichtlich ihrer Form oder Richtung stattfinden. Sähe man jedoch von den letzteren Verhältnissen ganz ab, und ließe man der geometrischen Darstellung nur das Hülfs-

mittel, Größen hinsichtlich ihrer Quantität durch die einzelnen Theile Ein und derselben geraden Linie, welche sich von einem gegebenen Punkte aus nach Einer Seite ins Unendliche erstreckte, zu versinnlichen; so würde man immer noch im Stande sein, sämmtliche Gesetze anschaulich zu machen, welche die Arithmetik durch die oben beschriebenen Grundoperationen mit positiven Zahlen durch abstrakte Schlußfolgerungen entwickelte. Die quantitativen Werthe oder die absoluten Längen der einzelnen von dem gegebenen Nullpunkte aus gemessenen Abschnitte jener geraden Linie würden alsdann die einzelnen Glieder der unendlichen Reihe der positiven Zahlen darstellen, deren Unterschiede sich durch fortgesetzte Theilung der unendlichen Kleinheit und dem stetigen Übergange ineinander nähern. Alle Beziehungen, welche zwischen den positiven Zahlen stattfinden, würden auch zwischen jenen Abschnitten stattfinden, sowie sich die Begriffe der Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division sehr leicht durch Fortbildung und Rückbildung eines gegebenen Theiles der unendlichen Linie um einen anderen gleichfalls gegebenen Theil derselben, durch Vervielfältigung und Theilung eines solchen Theiles nach demselben Gesetze, nach welchem der Multiplikator aus der Längeneinheit gebildet ist, u. s. w., anschaulich machen lassen würden.

Nehmen wir an, die vorstehende gerade Linie erstrecke sich von dem gegebenen Nullpunkte aus auch in einer der früheren entgegengesetzten Richtung ins Unendliche fort; so erhalten wir durch die verschiedenen Abschnitte des letzteren Theiles der geraden Linie das räumliche Bild für die ganze Reihe der negativen Zahlen, und wenn wir alsdann zur Begründung aller geometrischen Untersuchungen als Postulat der Beschreibung nur die Möglichkeit der Konstruktion irgend einer begränzten Länge in der Richtung der obigen unendlichen Linie voraussetzen; so haben wir damit der Geometrie dieselben Elemente dargeboten, welche der Arithmetik durch die Einführung des Begriffes der positiven und negativen Zahlen verliehen sind. In jener unbegränzten einzigen geraden Linie müssen sich alle Operationen der Arithmetik mit positiven und negativen Zahlen versinnlichen lassen.

Außer jenen zwei einander direkt entgegengesetzten Richtungen Ein und derselben geraden Linie gibt es aber im Raume noch

unzählig viel andere Richtungen, welche sich von dem gegebenen Nullpunkte aus nach allen Seiten hin erstrecken. Man gewahrt bald, daß die geometrische Darstellung der zwischen verschiedenen Größen stattfindenden Beziehungen auf einer sehr niedrigen Stufe der Ausbildung bleiben würde, wenn man sich nur auf die ersteren beiden Richtungen beschränken und alle Konstruktionen vermeiden wollte, welche zu einer Benutzung der zuletzt erwähnten mannigfaltigen Richtungen nöthigten. Es versteht sich von selbst, daß alsdann alle Untersuchungen hinwegfallen würden, welche sich vorzugsweise auf solche räumliche Größen beziehen, bei denen man die Verschiedenartigkeit der *Richtung* ihrer Theile unterscheidet; es würden aber auch viele andere mathematische Gesetze *nicht* entwickelt werden können, welche sich ganz allein auf die *quantitaven* Verhältnisse der Größen beziehen lassen. So bildet z. B. der Pythagoräische Lehrsatz nur scheinbar eine Beziehung, welche lediglich auf die Begränzungslinien einer in einer Ebene liegenden, nach zwei Dimensionen sich erstreckenden Figur (das rechtwinklige Dreieck nämlich) Anwendung fände. Wenn man die beiden Katheten und die Hypotenuse dieses Dreieckes nur ihrer *Quantität* nach betrachtet; so kann man sich unter denselben auch drei abstrakte Zahlen denken, und das rechtwinklige Dreieck liefert alsdann die Regel, nach welcher die Quadratwurzel aus der Summe zweier Quadratzahlen gefunden werden kann. Wie würde die Geometrie dergleichen Resultate erzeugen können, wenn ihre Konstruktionen nur auf die Benutzung zweier entgegengesetzter Richtungen angewiesen wären?

Die Geometrie führt also mit *nothwendiger* Zuhülfenahme von Richtungen, deren Begriff der Arithmetik ganz fremd zu sein scheint, Operationen aus, welche der Letzteren mit demselben Rechte angehören, da sie auch auf Größen Anwendung finden, welche den Charakter der Räumlichkeit gar nicht tragen. Es dringt sich daher die Frage auf, ob sich in der Arithmetik nicht Beziehungen nachweisen lassen, welche den verschiedenen räumlichen Verhältnissen, namentlich dem Begriffe von *Richtung*, in derselben Allgemeinheit entsprechen, wie die absoluten Zahlen das Wesen der *Quantität* in seiner größten Mannigfaltigkeit zur geistigen Erkenntniß bringen.

Wenn man beachtet, daß die Arithmetik eine Wissenschaft ist,

welche nicht etwa Gesetze *erschafft*, nach denen Veränderungen an Größen vor sich gehen sollen, um alsdann mit Hülfe analytischer Expositionen die Resultate darzustellen, welche sich ergeben, wenn man dergleichen willkürlich erfundene Bildungsprinzipien auf beliebige Größen in Anwendung bringt, daß die Arithmetik vielmehr nur der Ausdruck von bereits vorhandenen und vom menschlichen Geiste als wahr erkannten Naturgesetzen ist, deren Wirkungen durch sie nur erklärt und mit den erzeugenden Ursachen in einen logischen Zusammenhang gebracht werden sollen: so muß es befremden, wie man darauf ausgehen kann, in den Methoden einer Wissenschaft, wie der Arithmetik, welche selbst erst vom menschlichen Geiste gewissermaaßen als Gedankensprache erfunden ist, nach Analogieen zu suchen, welche sich nicht ganz von selbst aus ihren Fundamentalbegriffen ergeben. In einen solchen Fall würde man aber offenbar kommen, wenn man die Arithmetik als eine Wissenschaft definirte, welche die Veränderungen der Größen nur hinsichtlich ihrer *Quantität* betrachtete und welche es wol gar nur mit *diskreten* Größen zu thun hätte, und wenn man alsdann untersuchen wollte, ob die auf die Darstellung von bloß quantitativen Verhältnissen diskreter Größen berechneten Methoden und Bezeichnungen auch geeignet wären, den allgemeineren Charakter der Größen unter dem Gesichtspunkte der *Anordnung* oder *Richtung* und auch der *Stetigkeit* ihrer Theile, wie er den *räumlichen* Größen zukommt, in sich aufzunehmen und als mathematisches Element zu behandeln. Der menschliche Geist, dessen Werk die arithmetische Zeichensprache ist, würde in den Entwickelungen derselben immer nur Beziehungen auf solche Größen erwarten dürfen, welche mit den von ihm a priori gesetzten und der Rechnung zu Grunde gelegten gleichartig wären — ein Suchen nach Relationen auf ganz verschiedenartige Elemente würde ein Zeichen sein, daß sich der Geist seiner eignen Schöpfung nicht klar bewußt gewesen wäre.

Das Sachverhältniß ist aber hier in der That ein umgekehrtes. Wir können nicht darauf ausgehen, in der Arithmetik Beziehungen zu *entdecken*, welche den Eigenschaften der ursprünglich angenommenen Größen zuwiderlaufen: wenn die Größen überhaupt unter allgemeineren Gesichtspunkten betrachtet werden sollen, als Dies ein anderes Mal geschehen ist; so müssen wir

von vorn herein die hierauf abzielenden Methoden und Bezeichnungsweisen zweckmäßig wählen, und die Grundbegriffe, welche den arithmetischen Deduktionen zum Ausgangspunkte dienen sollen, genügend feststellen.

Da die räumlichen Größen von allen diejenigen sind, welche hinsichtlich der Quantität und Form den Ausdruck der größten Allgemeinheit tragen, und da dieselben alle übrigen diskreten Vielheitsgrößen, bei welchen die Eigenschaft der Form ganz vernachlässigt wird, unter gewissen Einschränkungen mit einschließen; so kommt es behuf möglichster Verallgemeinerung der mathematischen Darstellungen offenbar nur darauf an, die Methoden so zu wählen, daß dadurch alle Gesetze anschaulich gemacht werden können, welche die räumlichen Größen in ihren quantitativen, stetigen und Richtungsverhältnissen beherrschen. Es ist schon mehrfach erwähnt, daß die Geometrie hierzu den natürlichsten Weg der bildlichen Darstellung im Raume selbst einschlägt. Der Arithmetik, deren hoher Beruf es ist, alle Größenverhältnisse in abstrakte Begriffe zu bringen, dieselben denken zu lehren, dürfen jene Beziehungen ebenfalls nicht fremd sein, weil sie sonst ihre Bestimmung nur in sehr unvollkommenem Grade erfüllen würde. Wir werden daher im Folgenden untersuchen, in welcher Weise die Arithmetik die in Rede stehende Aufgabe zu lösen, also die räumlichen Größenverhältnisse in ihrer ganzen Allgemeinheit nach Quantität, Stetigkeit und Richtung darzustellen im Stande ist. Außerdem werden wir in einigen späteren Paragraphen nachzuweisen versuchen, daß sich die vorstehenden allgemeinen Eigenschaften der räumlichen Größen auch an allen übrigen einer mathematischen Betrachtung fähigen Größen ausprägen lassen, und daß die letzteren aus den ersteren immer nur durch eine willkürliche Beschränkung gewisser Eigenschaften hervorgehen.

§. 28. Begriff der Quantität.

Allen Größen, welche einer mathematischen Betrachtung unterworfen werden, fehlt niemals das Merkmal der Vielheit ihrer Theile oder der Quantität. Es ist Dies die wich-

tigste Eigenschaft, nach welcher Größen miteinander verglichen werden. Man kann von den übrigen beiden Eigenschaften der Stetigkeit und der Anordnung der Theile absehen: der Begriff der Quantität kann jedoch nicht von dem Wesen der Größen getrennt werden, ohne daß sie aufhören, Größen zu sein. Ein mathematischer Punkt z. B., den man nur seiner räumlichen Ausdehnung nach betrachtet, hat keine Theile und ist demnach keine Größe; man kann verschiedene einzelne Punkte nicht miteinander vergleichen und ihr gegenseitiges Verhältniß durch einen mathematischen Ausdruck darstellen. Anders verhält es sich indessen mit verschiedenen *Anzahlen* von Punkten, wie etwa mit der Anzahl der Ecken verschiedener Polygone. Solche *Mengen* von Punkten werden allerdings zu wirklichen Größen, indem man sich die einfachen Theile derselben als einzelne gleiche Individuen, unbekümmert um deren absoluten geometrischen Werth, denkt, und dieselben nur ihrer Anzahl nach betrachtet. Diese *Anzahl* bildet alsdann die Quantität der in Rede stehenden Mengengröße.

Die Quantität einer Größe gelangt erst dann zur vollständigen geistigen Erkenntniß, wenn wir im Stande sind, das Verhältniß auszudrücken, in welchem dieselben zu einer gegebenen gleichartigen Größe, der *Einheit*, steht. Dieses Verhältniß oder das Resultat der *Messung* einer Größe durch ihre Einheit wird begriffsmäßig dargestellt durch die abstrakte *Zahl*. Wenn die Einheit gegeben ist, durch welche eine Größe gemessen werden soll; so kann der arithmetische Zahlwerth für die Quantität dieser Größe leicht gefunden werden. Bei allen räumlichen und auch bei allen diskret gedachten Größen bietet sich irgend eine Einheit als Maaß des Ganzen ungezwungen dar. So kann Ein Quadratfuß als Einheit einer Fläche, Ein Grad als Einheit der Winkelabweichung einer geraden Linie von einer gegebenen Richtung, Ein Thaler als Einheit für eine Summe Geldes, Ein Ereigniß als Einheit für eine gewisse Anzahl von Ereignissen angesehen werden. Bei manchen, sogenannten *intensiven* Größen, bietet sich eine Maaßeinheit nicht so leicht dar, und es ist unumgänglich nothwendig, wenn dieselben zu einem Gegenstande der mathematischen Untersuchungen gemacht werden sollen, sie aus Wirkungen zu bestimmen, welche sich an *extensiven* Raum- oder Mengengrößen messen lassen. Zu der Kathegorie derartiger

Größen gehören unter andern die Intenſitäten verſchiedener Kräfte, Wärmequellen, Lichtſtrahlen, Farben, Töne u. ſ. w., und eine ähnliche Bewandtniß hat es mit den zeitlichen Größen, welche ebenfalls erſt durch räumliche Größen dargeſtellt werden können, die durch Bewegung beſchrieben ſind. Die verſchiedenen Zeiträume werden z. B. durch die Längen oder die Winkel gemeſſen, welche reſp. ein Punkt oder eine Linie durchläuft, die ſich mit gleichförmigen Geſchwindigkeiten in gerader Richtung oder im Kreiſe bewegen; dieſe Größen können auch durch die Anzahl der iſochronen Schwingungen gemeſſen werden, welche ein Pendel von beſtimmter Länge zwiſchen dem Anfangs- und Endpunkte der gegebenen Zeiträume vollführt. Bei der Beſtimmung der Intenſität verſchiedener Kräfte, z. B. bei der Beſtimmung der Größe der Gewichte verſchiedener Körper, kann als Einheit der Druck angenommen werden, welche ein beſtimmtes Volum irgend einer gegebenen Materie in vertikaler Richtung ausübt. Die Stärke einer Wärmequelle kann durch die räumliche Ausdehnung gemeſſen werden, welche ein gewiſſer Körper durch die Einwirkung derſelben erleidet, u. ſ. f.

Den Begriff, welchen wir durch eine ſolche Meſſung von der Quantität irgend einer Größe erlangen, wird unter allen Umſtänden arithmetiſch ausgedrückt durch die Zahl. Das Nichts oder, als Zahlwerth, die Null iſt der Gränzpunkt aller Quantität: durch allmählige Vermehrung der gleichartigen Theile kann ſich der quantitative Werth einer Größe über jede höhere Grenze erheben oder den Werth des unendlich Großen, d. i., als Zahl, den Werth ∞ annehmen. Dem einfachen Begriffe der Quantität, ſobald man ſich dieſelbe ſchon als gebildet und durchaus nicht im Akte des Entſtehens durch ſukzeſſive Hinzufügung oder Hinwegnahme gewiſſer Theile denkt, iſt der Begriff der Richtung fremd. Von Quantität gibt es keinen Gegenſatz; Nichts iſt die Gränze aller Quantität, was mehr iſt, als Nichts, iſt Etwas, und hat Quantität; weniger, als Nichts, iſt ein undenkbarer Begriff.

Die Quantität einer Größe kann demnach weder poſitiv, noch negativ gedacht werden, da die Idee des Poſitiven erſt aus der des Negativen durch Umkehrung der Richtung des Bildungsgeſetzes, und vice versa, entſpringt. Die Quantitäten der beiden Zahlen $+a$ und $-a$ ſind einander vollkommen gleich, ſowie

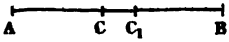
eine von einem gegebenen Punkte aus in der Richtung nach Osten gemessene Länge von a Fuß, hinsichtlich ihrer Quantität, gleich einer von demselben Punkte aus in der Richtung nach Westen gemessenen Länge von a Fuß ist. Demnach sind die Werthe der verschiedenen denkbaren Quantitätsverhältnisse aller möglichen Größen zu den ihnen entsprechenden Einheiten *absolute Begriffe*, zwischen denen es keine Relationen gibt, welche durch die Zeichen + und — dargestellt werden könnten: ihre arithmetischen Ausdrücke sind die *absoluten* Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 . . . mit sämmtlichen dazwischenliegenden Brüchen und Irrationalzahlen.

§. 29. Begriff der Stetigkeit.

Es ist schon früher (§. 2) angeführt, daß man unter *stetigen* Größen solche versteht, von denen kein Theil der kleinste ist, sodaß ein jeder nochso kleine Theil derselben auch ferner theilbar bleibt; während unter *diskreten* Größen solche verstanden werden, welche aus einer gewissen Vielheit unter sich gleich gedachter individueller Theile bestehen, von denen keiner getheilt werden kann, ohne die Vorstellung von seiner Existenz zu vernichten.

Das Wesen der Stetigkeit kommt den räumlichen und mithin auch allen denjenigen Größen zu, deren Werthe erst durch Raumgrößen bestimmt werden können (s. den vorhergehenden §). Die stetigen Raumgrößen sind entweder Linien, oder Flächen, oder Körper. Die Linien entstehen durch die fortgesetzte Bewegung oder Ortsveränderung eines mathematischen Punktes; der Weg, welchen ein solcher Punkt durchläuft, bildet eine geometrische Linie, deren Gränze der Punkt selbst ist. Durch die Bewegung einer Linie im Raume entsteht die Fläche, deren Gränze die Linie ist, und durch die Bewegung einer Fläche wird der Körper erzeugt, von welchem die Fläche die Gränze bildet.

Es leuchtet ein, daß ein jedes der drei vorstehenden erzeugenden Elemente, z. B. der Punkt, bei der Beschreibung der Linie AB, ehe er von A bis B gelangt, *alle* dazwischenliegenden geometrischen Örter berührt haben muß.



Da die Anzahl dieser Örter immer unend-

lich groß ist, wie klein auch der Abstand der beiden Gränzpunkte A und B sein mag; so folgt, daß der fragliche Punkt bei seiner Bewegung von A bis B der Endpunkt von unendlich vielen verschiedenen Längen, wie AC, AC_1, u. s. w. gewesen sein muß. Wollte man nun versuchen, sich von der Entstehung einer endlichen Linie AB eine genügende Vorstellung zu machen; so müßte man den erzeugenden Punkt im Akte seiner Bewegung von A bis B unabläſſig verfolgen, und in jedem Augenblicke von der Lage des Ortes C, in welchem sich der Punkt momentan befindet, oder von dem Abstande AC desselben vom Punkte A eine vollständige Erkenntniß zu erlangen suchen. Eine solche Erkenntniß würde man erhalten, wenn man von allen Längen, wie AC, die Verhältnisse anzugeben wüßte, in welchen dieselben zu irgend einer bereits gebildeten Linie oder zu der Längeneinheit stehen. Diese Verhältnisse müßten offenbar ebenfalls durch unendlich kleine Unterschiede ineinander übergehen, damit sie die Repräsentanten der verschiedenen Glieder einer stetig gebildeten Reihe würden. Da nun die eben erwähnten Verhältnisse nur durch Zahlen ausgedrückt werden können, die Zahlen aber, als diskret gebildete Größen, immer Unterschiede zwischen sich lassen, welche einen bestimmten Werth haben, also noch ferner theilbar und mithin nicht unendlich klein sind; so erkennt man leicht, worin die Schwierigkeit beruhet, auf welche man stößt, wenn man es versucht, die Verhältnisse aller stetig gebildeten Größen zu irgend einer angenommenen Einheit arithmetisch auszudrücken. Es wird zwischen den beiden Endpunkten der Linie AB viele Punkte, wie C, geben, für welche der Abstand AC das Vielfache irgend eines aliquoten Theiles der gewählten Längeneinheit ist, und demnach ganz genau numerisch dargestellt werden kann; die Anzahl dieser Punkte wird in dem Maaße wachsen, in welchem der eben erwähnte aliquote Theil der Einheit an Größe abnimmt. Wollte man aber sämmtliche zwischen A und B liegende Abstände numerisch darstellen; so müßte man ins Unendliche fortfahren, die Einheit in immer kleinere aliquote Theile zu theilen, um mit Hülfe derselben jene Abstände arithmetisch auszudrücken. Gewisse Abstände, wie etwa AC_1, welche behuf ihrer numerischen Darstellung eine solche Zerlegung der Einheit in unendlich kleine

Theile erforderlich machen, nennt man in Beziehung zu dieser Einheit *inkommensurabel* oder *irrational*.

Die Unzulänglichkeit der arithmetischen Darstellung der Verhältnisse aller stetig gebildeten Größen zu ihren Einheiten liegt nicht an einer mangelhaften *Wahl* der Bezeichnung oder an der Unzweckmäßigkeit des Prinzipes, nach welchem das gesammte Zahlensystem aufgestellt ist, sodaß man hoffen könnte, durch eine geschickte Änderung dieses Prinzipes vollständige Ausdrücke für alle jene Verhältnisse zu erlangen. Die Unzulänglichkeit, auf die wir hier stoßen, ist vielmehr in der Natur des menschlichen Geistes begründet. So wenig wir einen vollständigen Begriff vom unendlich *Großen* haben, und dasselbe durch wiederholtes Setzen des Endlichen zu erzeugen vermögen; ebenso wenig haben wir eine Vorstellung vom unendlich *Kleinen*, welches zu dem Endlichen in derselben Beziehung steht, wie das Letztere zum unendlich Großen. Wir sind demnach nicht im Stande, das wahre Wesen einer *stetigen* Bildung durch unendlich kleine Übergänge genau zu *denken*, uud werden mithin auch nicht erwarten können, dasselbe durch *Zahlen* irgend einer Art, welche doch nur die Vertreter des mathematischen Gedankens sein sollen, genügend darzustellen.

Dessen ungeachtet sind die stetigen Größen durchaus nicht von den arithmetischen Untersuchungen ausgeschlossen: die Arithmetik beschäftigt sich mit denselben in gleicher Weise, wie mit den diskreten Größen; man hat dabei nur zu erwägen, daß diejenigen Quantitätsverhältnisse, deren numerischer Ausdruck eine irrationale Zahl sein würde, durch Zahlen mit endlichen Ziffermengen nicht vollständig dargestellt werden können, daß man sich dem wahren Werthe solcher Verhältnisse jedoch immer mehr und mehr bis zu jeder beliebig gegebenen Gränze nähern kann, je weiter man die zu diesem Ziele führende arithmetische Operation in Anwendung bringt, oder daß man jenen Werth ganz genau erreichen würde, wenn man die Operation ins *Unendliche* fortsetzte.

Die Geometrie, welche ihre Konstruktionen im stetigen Raume ausführt, ist vielfältig im Stande, die wahren Werthe irrationaler Größen darzustellen. Hierbei hat man jedoch zu bedenken, daß die geometrisch dargestellten Größen noch nicht *gemes-*

sen sind, und daß dieselben, obgleich sie in ihren wirklichen Werthen vor unserem sinnlichen Auge liegen, keineswegs einen vollständigen Begriff von dem Verhältnisse erwecken können, in welchem sie zu irgend einer gegebenen Einheit stehen. Diesen Begriff würden wir erst durch eine direkte Messung jener Größen durch die Einheit erlangen können, und es leuchtet ein, daß derselbe ebenso unvollkommen ausfallen würde, wie die Entwickelung einer irrationalen Zahl durch eine analytische Methode.

In ihrer allgemeinen Zeichensprache besitzt die Arithmetik übrigens ein Mittel, alle Größenverhältnisse in geschlossenen Ausdrücken darzustellen: so steht z. B. $\sqrt{2}$ für die irrationale Zahl 1,41421 . . ., π für 3,14159 . . ., e für 2,71828 . . ., log. 5 für 1,60943 . . . u. s. w. Diese allgemeinen arithmetischen Formeln, welche zugleich das Bildungsgesetz der verlangten Größe deutlich aussprechen, oder dasselbe als bekannt voraussetzen, treten in einer dem Charakter der Arithmetik eigenthümlichen Weise gewissermaaßen an die Stelle der geometrischen Konstruktion. Obgleich dieselben erst bei gehöriger Entwickelung den Werth der dadurch vorgestellten Größe ergeben würden; so kann man mit ihnen unter Beobachtung bekannter Regeln doch ebenso, wie mit den Größen selbst rechnen. Auch dieser Umstand lehrt, wie unbeschränkt die Arithmetik in ihren Untersuchungen über Quantitätsverhältnisse irgend einer Art ist, und wie wenig ihr solche Größen fremd sind, die einem stetigen Wachsthume ihr Dasein verdanken.

§. 30. Begriff der Richtung.

Bei den räumlichen Größen unterscheiden wir neben ihrer Quantität auch den geometrischen Ort, in welchem sich ein jeder ihrer einfachen Theile befindet. Durch eine solche Berücksichtigung der relativen Lagen der verschiedenen Punkte irgend eines Körpers erlangt erst die Idee, welche wir uns von dem räumlichen Werthe dieses Körpers zu machen haben, den erforderlichen Grad von Genauigkeit. Wir werden hierdurch in den Stand gesetzt, uns von der Entstehung dieses Körpers aus seinen einfachen Theilen eine getreue Vorstellung zu machen, indem wir einen

ſolchen Theil in Gedanken durch alle Lagen führen, welche derſelbe einnehmen muß, um allmählig den Körper zu beſchreiben. Die Beſtimmung der Lage irgend eines Punktes im Raume gegen einen anderen gegebenen Punkt geſchieht am natürlichſten durch die Angabe der Lage einer geraden Linie, welche von dem letzteren Punkte aus nach dem erſteren gezogen iſt, und durch die gleichzeitige Angabe der abſoluten Länge dieſer Linie. Die Verſchiedenheit, welche wir in den Lagen mehrerer gerader Linien beobachten, die von einem feſten Punkte aus nach beliebigen Punkten im Raume gezogen ſind, erweckt in uns den Begriff der *Richtung* einer geraden Linie, ein Begriff, welcher an ſich einfach und keiner weiteren Definition fähig iſt.

Dieſer Begriff der Richtung muß ſich zu dem der Quantität geſellen, um die Raumgrößen in allen ihren räumlichen Beziehungen vollſtändig darzuſtellen. Da die Quantität irgend einer Raumgröße immer die Eigenſchaft der Ausdehnung beſitzt, und demnach nur durch Größen gemeſſen werden kann, deren einzelne Punkte verſchiedene Lagen gegeneinander haben, an denen ſich alſo der Begriff der Richtung beurkundet; ſo folgt, daß die Vorſtellung von Quantität räumlicher Größen die Idee von Richtung nothwendig vorausſetzt, und daß die Erſtere bei räumlichen Größen ohne die Letztere gar nicht gedacht werden kann. Ferner folgt hieraus, daß wenn wir irgend eine Methode wählen, um dadurch die Quantitätsverhältniſſe verſchiedener Raumgrößen darzuſtellen, dieſe Methode jedenfalls von der Art ſein muß, daß ſich bei den ſukzeſſiven Entwickelungen derjenigen Reſultate, durch welche die in Rede ſtehenden Größen ihrer *Quantität* nach ausgedrückt werden ſollen, auch der Begriff von geſetzmäßiger Bildung in einer gewiſſen *Richtung* unverkennbar zu verſtehen gibt.

Die einfachſten räumlichen Figuren ſind die verſchiedenen Abſchnitte einer geraden Linie. Man kann ſich derſelben bedienen, um durch ihre abſoluten Längen die verſchiedenen Quantitäten von Größen irgend einer Art darzuſtellen. Die Entſtehung dieſer Längen durch den ſtetigen Fortſchritt eines Punktes in Ein und demſelben Sinne und die Rückbildung derſelben durch eine Bewegung desſelben Punktes in entgegengeſetztem Sinne können ohne die Vorſtellung von zwei einander direkt entgegen-

gesetzten Richtungen, welche in derselben geraden Linie liegen, nicht gedacht werden. Das Element also, welches in diesem Falle zu einer geometrischen Darstellung der mannichfaltigen Quantitätsverhältnisse von Größen benutzt wird, trägt auch das Merkmal der Erstreckung in einer bestimmten Richtung an sich, und es ist nicht möglich, jene Verhältnisse in ihrer Allgemeinheit und die Beziehungen, in denen dieselben zueinander stehen und sich auseinander entwickeln, anschaulich zu machen, wenn man dabei nicht die Idee des Fortschrittes in zwei einander direkt entgegengesetzten Richtungen als einen von dieser Darstellungsweise unzertrennlichen Begriff voraussetzt.

In der Arithmetik, welche das Hülfsmittel der Beschreibung im Raume nicht kennt, werden die Quantitäten der verschiedenen Größen durch die absoluten Zahlwerthe ausgedrückt. Da die Zahlen auch die Repräsentanten der quantitativen Verhältnisse räumlicher Größen in ihrer ganzen Allgemeinheit sind, und diesen Größen das Merkmal der Richtung in einer solchen Weise zukommt, daß die stufenweise Entwickelung der mannigfaltigen Quantitätsverhältnisse jener Größen nothwendig den Begriff der Richtung erzeugen muß; so kann man schon a priori den Schluß ziehen, daß sich in dem arithmetischen Zahlensysteme das Wesen der Richtung unzweideutig offenbaren wird. In der That erkennen wir an dem gleichmäßigen Fortschreiten der Reihe der absoluten Zahlen durch Übergänge, welche zwar nicht vollkommen stetig oder unendlich klein dargestellt werden können, deren Kleinheit aber so gering, wie nur möglich, gedacht werden kann, den Typus der gleichförmigen geometrischen Bewegung eines Punktes in einer bestimmten Richtung, und zwar von einem gegebenen Nullpunkte aus bis ins Unbegränzte fort. Die allmählige Rückbildung der Zahlen durch Subtraktion, von irgend einem Gliede jener Reihe anfangend, entspricht vollkommen der Bewegung desselben Punktes in einer der ursprünglichen direkt entgegengesetzten Richtung.

§. 31. Arithmetiſche Bezeichnung der nach dieſen beiden entgegengeſetzten Richtungen gebildeten Größen.

Die Quantität irgend einer Größe wird nach §. 28 immer durch eine *abſolute* Zahl a arithmetiſch ausgedrückt; bei der geometriſchen Darſtellung der Größenverhältniſſe durch gerade Linien hat man alsdann unter a die abſolute Länge irgend einer Linie zu verſtehen.

Die beiden Merkmale der Quantität und Richtung ſind ſo voneinander unabhängig, daß man an einer gegebenen Größe den Werth des Einen willkürlich variiren laſſen kann, ohne den des andern im mindeſten zu ändern; will man alſo an dem arithmetiſchen Ausdrucke für die Länge a auch zugleich die Richtung kenntlich machen, welche dieſelbe im Raume einnimmt; ſo leuchtet ein, daß hierzu außer der Zahlform noch ein zweites Element erforderlich iſt, welches in einer dem Weſen der Richtung entſprechenden Weiſe variabel, von dem beſonderen Werthe der damit behafteten abſoluten Zahl aber ganz unabhängig iſt. Dieſes Element iſt das algebraiſche *Zeichen*, welches der Größe a gegeben und derſelben vorangeſetzt wird. Hiernach werden alle diejenigen Größen, welche von dem angenommenen Nullpunkte aus in der urſprünglichen Richtung gebildet ſind, mit dem Zeichen $+$ belegt, und heißen *poſitive* Größen.

Wenn es nicht darauf ankommt, den Gegenſatz der poſitiven Größen gegen gewiſſe andere, in verſchiedenen Richtungen liegende Größen ſehr bemerklich hervorzuheben; ſo läßt man das charakteriſtiſche Zeichen $+$ der erſteren Größen gewöhnlich weg, und begnügt ſich, für dieſelben ihre *abſoluten* Werthe zu ſetzen. Das Zeichen $+$ iſt zugleich eine Chiffer, durch welche die Operation der Addition zweier Größen angedeutet wird. Die hieraus fließende Bedeutung iſt von der obigen ſorgfältig zu unterſcheiden; das Symbol der Addition braucht nicht nothwendig das der poſitiven Größen zu ſein; man hat dem Zeichen $+$, welches anfänglich nur zur Andeutung der Addition gebraucht wurde, auch den vorhergehenden Sinn gegeben, da die verſchiedenen poſitiven Größen, als durch ununterbrochene Addition von dergleichen Größen zu dem Werthe Null allmählig entſtanden, angeſehen werden können.

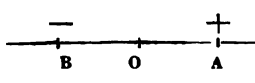
Das geometriſche Bild aller poſitiven Zahlen ſind die verſchiedenen Abſchnitte einer geraden Linie, welche ſich von irgend einem gegebenen Nullpunkte aus ins Unendliche erſtreckt. Es leuchtet ein, daß ſich im abſoluten Raume keine Richtung ſo ſehr vor den übrigen auszeichnet, daß man ſich genöthigt ſähe, dieſelbe unter allen Umſtänden als die poſitive anzunehmen. Die Wahl der urſprünglichen oder poſitiven Richtung iſt durch Nichts beſchränkt, ſowie auch die Lage des Nullpunktes, von welchem aus man die Längen meſſen will, vollkommen willkührlich bleibt. Wenn aber einmal eine ſolche Richtung und ein Nullpunkt angenommen iſt; ſo treten die Abſtände der verſchiedenen Punkte des nach allen Seiten unbegränzten Raumes ſowol ihrer Lage, wie ihrer Größe nach, in beſtimmte Beziehungen zu der poſitiven Richtung und zu dem Nullpunkte, und dieſe Beiden bilden gewiſſermaaßen die Anfangsglieder zweier großer Syſteme, in welchen die Quantität und die Richtung einer jeden vom Nullpunkte aus im Raume gezogenen Linie ihre Stelle finden.

Ein Punkt, welcher ſich von dem als feſt gedachten Nullpunkte aus in der poſitiven Richtung fortbewegt, gelangt allmählig in die Endpunkte aller poſitiven Linien; der Akt dieſer geometriſchen Beſchreibung der poſitiven Längen durch die ſtetige und gleichförmige Bewegung eines Punktes entſpricht in der Arithmetik der Bildung der poſitiven Zahlen durch fortgeſetzte Addition unendlich geringer und unter ſich gleicher poſitiver Zahlwerthe.

Denkt man ſich die poſitive Richtung im Raume auf der entgegengeſetzten Seite des Nullpunktes ebenfalls ins Unbeſtimmte verlängert; ſo heißt die letztere die *negative* Richtung, und alle von dem Nullpunkte aus in dieſer Richtung gemeſſenen Abſchnitte ſind *negative* Linien. Dieſelben werden ganz in der vorſtehend bemerkten Weiſe durch die Bewegung eines Punktes beſchrieben, welcher in der Richtung der rückwärts verlängerten poſitiven Axe im Raume fortſchreitet. Die letztere Richtung ſteht zu der erſteren in einer ſolchen Beziehung, daß ſie aus dieſer unmittelbar erhalten wird, wenn der beſchreibende Punkt, nachdem er in poſitiver Richtung irgend eine Länge durchlaufen hat, ſeine Bewegung dergeſtalt ändert, daß er allmählig in die Endpunkte der bereits früher gebildeten, in quantitativer Rückſicht kleineren, Längen

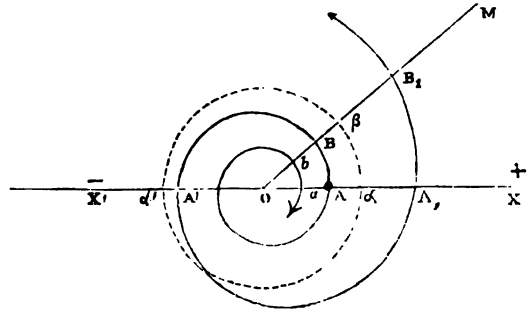
zurückkehrt. Mit dieſer Bewegung über den Nullpunkt hinausſchreitend, erzeugt jener Punkt ſukzeſſive alle negativen Linien.

In der Arithmetik entſpricht die zuletzt erwähnte Bewegung des erzeugenden Punktes einer Umkehrung des Bildungsgeſetzes der poſitiven Zahlen aus der Null (§. 6) oder einer fortgeſetzten Subtraktion (§. 15). Man bezeichnet daher die negativen Zahlen einfach dadurch, daß man ihnen das Subtraktionszeichen — vorſetzt. Hiernach würde die geometriſche Repräſentantin für die negative Zahl — a die Linie OB ſein, deren abſolute Länge gleich a Längeneinheiten iſt, und welche, vom Nullpunkte O aus gemeſſen, in der rückwärts gekehrten Verlängerung der poſitiven Richtung OA liegt.



§. 32. Nähere Unterſuchung der übrigen im Raume möglichen Richtungen.

Denken wir uns durch die unbegränzte gerade Linie X′OX,



von welcher der Theil OX die poſitive und der Theil OX′ die negative Richtung darſtellt, eine Ebene gelegt, und betrachten wir zuvörderſt die verſchiedenen durch den Nullpunkt O in dieſer Ebene zu ziehenden geraden Linien. In einer jeden dieſer Linien, wie OM, laſſen ſich durch die Abſtände der verſchiedenen in ihr liegenden Punkte vom Nullpunkte O alle denkbaren Quantitätsverhältniſſe darſtellen. Dieſe Abſtände ſind ihrer abſoluten Länge oder Quantität nach mit den entſprechenden Abſtänden in der poſitiven oder negativen Richtung vollkommen identiſch, auch be-

merkt man, daß sie aus der in der Richtung OM liegenden Längeneinheit ganz auf dieselbe Weise entstehen, wie die positiven und negativen Linien aus derselben Einheit resp. in positiver und negativer Richtung hervorgegangen sind; jene Linien unterscheiden sich von den letzteren nur hinsichtlich ihrer Lage oder Richtung.

Um die mannichfaltigen, der Richtung nach verschiedenen Linien miteinander vergleichen zu können und von dem Werthe dieser Verschiedenheit eine vollständige mathematische Vorstellung zu erhalten, ist es erforderlich, für das Merkmal der Richtung eine feste Maaßeinheit anzugeben, durch welche der Werth aller übrigen Richtungen durch einen einfachen Akt der Vergleichung bestimmt werden kann. Denkt man sich zu diesem Ende um den Mittelpunkt O mit irgend einem Halbmesser $O\alpha$ einen Kreis beschrieben; so liefert offenbar die Länge des Kreisbogens $\alpha\beta$, welcher von dem in der positiven Axe liegenden Durchschnittspunkte α bis zu dem Durchschnittspunkte β jenes Kreises mit der Axe OM gemessen ist, ein Maaß für die Richtung sämmtlicher in der Linie OM liegenden Längen. Nimmt man an, der Halbmesser $O\alpha$ oder auch die ganze Axe OX drehe sich stetig um den Mittelpunkt nach Ein und derselben Seite herum; so gelangt dieselbe nachundnach in alle möglichen der Ebene XMX′ angehörigen Lagen. Ganz analog der Variation, welche die Quantität bei der Bewegung eines Punktes in derselben geraden Linie erleidet, variirt hier bei der Drehung im Kreise die Eigenschaft der Richtung durch allmählige und unendlich kleine Übergänge. Halten wir zur Bestimmung des Werthes der verschiedenen Richtungsverhältnisse die im Vorstehenden angedeutete Methode fest, und nehmen wir der Einfachheit wegen an, der Halbmesser $O\alpha$ des Kreises $\alpha\beta\alpha'$ sei gleich der Längeneinheit; so leuchtet ein, daß das Maaß für die Richtung der positiven Linie $= 0$ ist. Setzt man den Bogen $\alpha\beta = \varphi$; so wird φ das Maaß für die Richtung sämmtlicher in der Axe OM liegenden Linien sein. Die Richtung der negativen Linien in der Axe OX′ wird offenbar durch die Größe $\pi = 3{,}141\ldots$ gemessen werden.

Setzt man die Drehung der Axe OX über die negative Lage OX′ weiter fort; so fällt dieselbe nach Vollendung einer ganzen Umdrehung wiederum mit der positiven Lage zusammen, und

man ſieht, daß auch die Größe 2π für das Maaß der Richtung der poſitiven Linie gelten könnte. Bei fortgeſetzter Drehung würde die Axe auch wieder in die Lage OM kommen, und da Dies alsdann nach einer jeden ganzen Umdrehung aufs neue der Fall ſein würde; ſo erhellet, daß die Richtung der in der Axe OM liegenden Abſchnitte allgemein durch die Größe $\varphi+2i\pi$ gemeſſen werden könnte, worin $\varphi=\alpha\beta$ kleiner, als 2π iſt, und i irgend eine ganze Zahl, die Null mit eingeſchloſſen, bezeichnet.

Die letztere Unbeſtimmtheit in dem Werthe für die Richtung irgend einer Linie, wie OB, findet ſo lange ſtatt, als es willkürlich bleibt, durch wievielmalige Umdrehung um den Nullpunkt man die Lage OM aus der poſitiven Lage OX entſtanden anſehen will. Unter gewiſſen Umſtänden bleibt jedoch hierüber gar kein Zweifel, und das Maaß für die Richtung der Linie OB nimmt alsdann einen feſt beſtimmten Werth an. Ein ſolcher Fall tritt ein, wenn man die Linie OB als den Vektorradius einer Spirale $ABA'A_1B_1\ldots$ anſieht, welche ſich, von dem Punkte A in der poſitiven Axe anfangend, nach einer beſtimmten Seite um den Nullpunkt herumſchlingt. Die Richtung von OB wird alsdann durch den Bogen φ, die von OB_1 durch den Bogen $\varphi+2\pi$ u. ſ. w. gemeſſen.

Ebenſo, wie man die poſitive Axe OX in der Richtung $\alpha\beta\alpha'$ um den Nullpunkt herumdrehete, hätte man derſelben auch eine Drehung in der entgegengeſetzten Richtung von α über α' nach β mittheilen können. Dieſelbe würde auf dieſe Weiſe ebenfalls in alle der Ebene XMX' angehörigen Lagen kommen. Die Bögen, welche der Endpurkt α des Halbmeſſers $O\alpha$ bei der letzteren Drehung beſchreiben würde, tragen zu den bei der erſteren Drehung beſchriebenen Bögen offenbar dasſelbe Verhältniß, wie die poſitiven Größen zu den negativen. Bezeichnete man alſo den Bogen $\alpha\beta$ mit $+\varphi$, ſo würde ein Bögen von derſelben abſoluten Länge, welcher bei der Drehung in der Richtung $\alpha\alpha'\beta$ beſchrieben wäre, $=-\varphi$ ſein. Man ſieht hieraus, daß das Maaß für die Richtung der Axe OM, welches nach dem Obigen den vieldeutigen Werth $\varphi+2i\pi$ haben konnte, nach der letzteren Betrachtung auch noch alle in der Form $-(2i\pi-\varphi)$ oder $\varphi-2i\pi$ enthaltenen Werthe annehmen kann. Wenn die Entſtehung der Linie OB durch Drehung aus der poſitiven Axe nicht

willkürlich bleibt, wie bei der Spirale in der obigen Figur; so verschwindet auch die letztere Unbestimmtheit des Werthes für die Richtung jener Linie. So wird z. B. die Richtung der Linie Oa' nur durch den negativen Bogen $-\pi$, die der Linie Ob nur durch $-(2\pi-\varphi)=\varphi-2\pi$, die der Linie Oa nur durch -2π u. s. w. gemessen.

Die Lage der Ebene XMX', in welcher alle eben betrachteten Richtungen liegen, ist nur der Bedingung unterworfen, daß sie durch die Linie X'OX gehe; im Übrigen ist sie willkürlich. denkt man sich daher diese Ebene um die Axe X'OX gedrehet; so nimmt sie in den verschiedenen aufeinanderfolgenden Lagen nachundnach alle Punkte des Raumes in sich auf, und alle im Raume möglichen Richtungen werden in irgend Einer dieser Lagen enthalten sein. Es werden aber auch die in irgend Einer dieser Ebenen liegenden Richtungen zu einander und zu den ursprünglich als positiv und negativ angenommenen Richtungen OX und OX' genau dasselbe Verhältniß haben, wie die in der Ebene XMX' enthaltenen Richtungen, und man sieht, daß das Maaß φ für die Winkelabweichung einer gewissen Linie von der positiven Richtung OX nicht bloß der Linie OM, sondern allen in der Oberfläche eines Kegels liegenden Richtungen angehört, dessen Axe OX und dessen Seitenlinie OM ist.

Wollte man eine solche außerhalb der Ebene XMX' liegende Richtung näher bestimmen; so kann Dies durch einen einfachen Akt der Vergleichung mit der Richtung der festen Axe OX offenbar nicht geschehen. Die Richtung einer solchen Linie, die ON heiße, kann auf die Richtung einer bekannten Linie OX direkt nur durch die Größe des ebenen Winkels NOX bezogen werden, welchen die erstere Linie beschreiben muß, um bei einer kreisförmigen Drehung aus der positiven Lage in die Lage ON zu gelangen: ist dieser Winkel gleich MOX; so wird die Richtung der ON ebensoviel von der Richtung der OX verschieden sein, wie die der OM von OX verschieden ist, und beide Linien werden für ihre Richtungen ein gemeinschaftliches Maaß besitzen. Da nun dessenungeachtet die Richtungen der beiden Linien OM und ON nicht identisch sind, obgleich sie sich von Einer und derselben Fundamentalgröße OX ganz auf dieselbe Weise unterscheiden; so bleibt Nichts weiter übrig, um den noch bleibenden Un-

terschied zwischen jenen Richtungen herauszustellen, als die charakteristischen Beziehungen zu betrachten in welchen jene Richtungen zu andern Raumgrößen stehen, deren Abhängigkeit von der ursprünglichen Are OX bekannt ist. Am einfachsten und im erweiterten Sinne des bisher angewendeten Prinzipes würde man hierzu gelangen, wenn man zuvörderst den Winkel angäbe, der die Grundebene XMX′ um die Are X′X beschreiben müßte, um in die Lage der Ebene XNX′ zu gelangen, und darauf ganz in der früheren Weise die Neigung NOX der Linie ON in dieser Ebene gegen die positive Richtung OX bestimmte. Die Drehung der Ebene XMX′ würde durch den Winkel gemessen werden, den ein auf der Are X′OX errichtetes Perpendikel zu gleicher Zeit beschriebe. Man erkennt jedoch, daß durch eine solche Beziehung der Richtung ON auf mehrere voneinander verschiedene räumliche Größen das Gesetz der Entstehung aus dem Anfangsgliede des ganzen Größensystemes, d. i. aus der Richtung der positiven Are OX, nicht unmittelbar, sondern erst vermittelst mehrerer Vergleichungsstufen dargestellt werden kann, und daß demnach durch dieses Verfahren der Begriff des einfachen Messens durch eine einzige Einheit geschmälert wird. Die Resultate dieser verschiedenen Messungen lassen sich sowenig geometrisch, wie arithmetisch, in ein einziges zusammenfassen und als absolut einfaches Merkmal an der zu bestimmenden Größe dergestalt ausprägen, daß dieselbe dadurch fähig würde, wiederum mit anderen in gleicher Weise gemessenen Größen durch die Grundoperationen der Arithmetik in Verbindung gebracht und nach den Regeln derselben variirt zu werden. Man kann direkt nur solche Richtungen mit einander vergleichen, welche in derselben Ebene liegen; es werden daher im Folgenden auch nur die Verhältnisse betrachtet werden, in welchen die verschiedenen Richtungen ein und derselben Ebene zu einander stehen.

§ 33. Arithmetische Darstellung der verschiedenen in Einer Ebene liegenden Richtungen.

Es kommt jetzt darauf an, die Prinzipien zu erklären, nach welchen die Arithmetik den Begriff der Richtung in seiner ganzen Allgemeinheit in sich aufnimmt. Mit der Einführung des

Gegensatzes der positiven und negativen Zahlen ist hiermit der Anfang gemacht, und in der Arithmetik der Boden vorbereitet, auf welchem sich das ganze System der mit dem Merkmale der Richtung behafteten Größen erhebt. Jene Zahlen haben nur dann eine Bedeutung, wenn man sie auf Größen bezieht, welche eine Entstehung in zwei einander direkt entgegengesetzten Richtungen beurkunden.

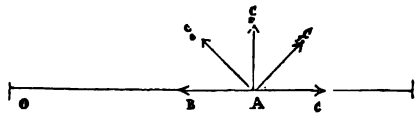
Nun kann man behaupten, daß es in der ganzen physischen und demnach auch in der geistigen Natur kein Bildungsgesetz geben kann, welches, wenn es stetig zur Anwendung gebracht würde, Resultate zum Vorschein brächte, welche unstetig voneinander getrennt wären oder gar als schroffe Gegensätze aufträten, zwischen denen die vermittelnden, durch unendlich kleine Übergänge ineinander fließenden Glieder fehlten und gar nicht gedacht werden könnten. Alle plötzlichen, sprungweisen Veränderungen sind unnatürlich, und mithin unlogisch; irgend ein Zustand, eine Eigenschaft, ein Größenwerth kann nur allmählig geändert werden, und zwischen zwei voneinander verschiedenen Zuständen müssen unendlich viele stetige Übergänge liegen.

Es müßte demnach befremden, wie die Arithmetik nur fähig sein sollte, Größen darzustellen, welche das Merkmal der Entstehung in zwei einander direkt entgegengesetzten Richtungen an sich trügen, ohne zugleich für solche Größen Begriffe zu haben, welche den Übergang der Einen in die Anderen, d. i. der positiven Größen in die negativen, und umgekehrt, allmählig vermitteln.

Man hat gesehen, daß die Werthe der verschiedenen durch möglichst kleine Unterschiede auseinander gebildeten Zahlen durch die Abstände der einzelnen Punkte einer geraden Linie von einem in derselben angenommenen Nullpunkte geometrisch dargestellt werden könnten. Das Gesetz der Zahlenbildung durch sukzessive Addition entspricht in geometrischer Bedeutung der Bewegung eines Punktes in jener geraden Linie nach Ein und derselben Richtung fort. Ueberhaupt wird die Ausführung irgend einer arithmetischen Operation ihr geometrisches Bild in einer Bewegung jenes Punktes nach einem bestimmten Gesetze finden.

Denkt man sich daher, dem Punkte A wohne das Bestreben inne, sich in der Richtung OC zu bewegen; so wird derselbe, von A weiterschreitend, nach einer gewissen Zeit um das Stück

AC in der geraden Linie OC vorgerückt sein. Diese Bewegung entspricht einer Addition der Länge AC zu der Länge OA. Wollte man nun aber von der Länge OA eine andere AB *subtrahiren*; so müßte sich der beschreibende Punkt von A gegen O



rückwärts bewegen. Eine solche Umkehrung des der Bewegung des Punktes A anfänglich zu Grunde gelegten Prinzipes, in Folge dessen er sich in der Richtung OC bewegen konnte und demgemäß von O bis A gelangt war, kann nur unter der Voraussetzung gedacht werden, daß diese Veränderung *allmählig* erfolge, und daß es zwischen jenen beiden Zuständen des Prinzipes eine unendliche Reihe von stetig aufeinander folgenden Zwischengliedern gebe, von denen ein jedes dem obigen Punkte als Richtschnur bei seiner Bewegung möglicher Weise auferlegt werden könnte.

Ein Bild aus der Sinnenwelt, welches beispielsweise zur Bestätigung des eben Gesagten dienen kann, ist ein Mensch, welcher in der Richtung OC fortschreitet, und in Folge dieser Bewegung in den Punkt A gekommen ist. Damit ein Mensch nicht bloß schreite, sondern in einer *bestimmten Richtung* oder auf ein *bestimmtes Ziel* los schreite, ist es unbedingt nothwendig, daß sein Auge diesem Ziele zugekehrt sei: man kann unter Umständen auch rückwärts, d. h. mit dem Rücken dem Ziele zugekehrt, oder auch seitwärts in einer gegebenen Richtung schreiten; eine solche naturwidrige Bewegung ist jedoch nur dann möglich, wenn der Mensch schon eine gewisse Zeit im Raume gelebt, von den räumlichen Beziehungen Abstraktionen zu bilden gewußt hat und danach in den Stand gekommen ist, sich durch die seitwärts liegenden Gegenstände so zu orientiren, daß die widersinnige Bewegung seines Körpers den Erfolg hat, ihn an einen bestimmten Ort zu bringen, dem sein Auge gewissermaaßen nur im Geiste zugekehrt ist. Fehlten jedoch alle übrigen Gegenstände im Raume, mit Ausnahme des Zieles, oder würde der Mensch plötzlich zum ersten Male in den Raum versetzt; so würde er auf die letztere Weise nimmer in einer gegebenen Richtung sich bewegen können, und selbst unter den letzteren Voraussetzungen wird er die fragliche Richtung nicht mit Bestimmtheit und mit innerer Überzeu-

gung zu verfolgen im Stande sein. Soll demnach der in A angelangte Mensch nach B zurückschreiten; so muß er nothwendig zuvor eine halbe Umdrehung machen, damit sich sein Auge dem in der Richtung AO liegenden Ziele zuwendet. Diese Drehung erfolgt allmählig, und in jedem Augenblicke derselben ist der Mensch fähig, in Einer der Richtungen AC, AC_1, AC_2, AC_3 ... AB fortzuschreiten, von denen je zwei benachbarte nur unendlich wenig voneinander verschieden sind und stetige Übergänge von der Richtung AC in die Richtung AB bilden. Besitzt nun die Arithmetik die Mittel, irgend zwei Glieder dieser Reihe, nämlich die positive und die negative Richtung AC und AB in ihrer gegenseitigen Beziehung begriffsmäßig darzustellen; so muß man schon im voraus schließen, daß ihr auch für die übrigen mannichfaltigen Richtungen die angemessenen Beziehungen nicht fehlen werden.

§. 34. Die Unzulänglichkeit des Begriffes der positiven und negativen Zahlen zur Darstellung aller Bildungsgesetze von Größen stellt sich sehr schlagend heraus, wenn man die Reihe der sukzessiven Potenzen einer negativen Zahl

$$(-a)^0 (-a)^{\frac{1}{4}} (-a)^{\frac{2}{4}} (-a)^{\frac{3}{4}} (-a)^1 \ldots (-a)^2 \ldots (-a)^3 \ldots (-a)^4 \ldots \text{etc.}$$

d. i.

$$1 \quad \sqrt[4]{-a} \quad \sqrt{-a} \quad \sqrt[4]{-a^3} \quad -a \ldots \quad a^2 \quad \ldots \quad -a^3 \quad \ldots \quad a^4 \ldots \text{etc.}$$

betrachtet. Wenn man die Exponenten dieser Potenzen *stetig* wachsen läßt; so wird, wie schon vorhin bemerkt ist, ein arithmetisches Fortschreiten durch die einzelnen Glieder der vorstehenden Reihe in geometrischem Sinne der stetigen Bewegung eines Punktes, welcher immer den Endpunkt einer durch den arithmetischen Ausdruck vertretenen Linie bildet, vollkommen entsprechen. Beginnt man nun bei dem Gliede $(-a)^0 = 1$; so sieht man, daß sich im ersten Augenblicke der Bewegung jener Punkt im Abstande gleich der Längeneinheit auf der positiven Seite vom Nullpunkte befinden wird; beim Gliede $(-a)^1 = -a$ angelangt, erkennt man, daß der Punkt aus jener ersteren Lage in den Abstand a auf die negative Seite vom Nullpunkte gekommen sein muß; später muß er sich in verschiedenen Abständen abwechselnd einmal auf der positiven und dann wieder auf der negativen Seite be-

finden. Da die einzelnen Glieder der obigen Reihe nach einem bestimmten Gesetze sich stetig aus einander bilden und demnach die gesammte Reihe ein kontinuirliches Ganzes darstellt, welches geometrisch durch die Bewegung des obigen Punktes beschrieben wird; so ist es klar, daß ein jeder Ort, den derselbe bei dieser Bewegung einnimmt, eine Linie bestimmen muß, durch welche ein Glied der vorstehenden Reihe repräsentirt wird. Die zwischen zwei ganzen Potenzen von $-a$ liegenden unendlich vielen Glieder sind aber zum Theil imaginär, wie $(-a)^{\frac{1}{4}}$, $(-a)^{\frac{1}{2}}$ ꝛc. zum Theil scheinbar reell, wie $(-a)^{\frac{1}{3}} = -a^{\frac{1}{3}}$, $(-a)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ꝛc. Man fragt, was für eine Vorstellung man mit diesen Gliedern, namentlich mit den imaginären, verbinden solle, und wie man sich die beschreibende Bewegung des in Rede stehenden Punktes zu denken habe. In den beiden einander direkt entgegengesetzten reellen Axen kann derselbe sich nicht von der Einen Seite des Nullpunktes auf die andere bewegen, weil sonst alle Zwischenlagen reellen Gliedern der obigen Reihe entsprechen würden, sprungweise, wie durch Zauberschläge, kann derselbe ebenfalls nicht von Einem Orte zum anderen gelangen, eine solche Idee ist vernunftwidrig; es bleibt also kein anderer Ausweg, als die Annahme geltend zu machen, daß jener Punkt seine Bahn durch gewisse andere Örter des Raumes nehme, welche in den reellen Axen nicht liegen. Die von dem Nullpunkte nach jenen Örtern gezogenen geraden Linien würden alsdann gleichzeitig durch ihre absolute Länge und durch ihre Lage die in Rede stehenden Zwischenglieder der obigen Reihe darstellen. Solche Linien setzen offenbar den Begriff von Richtung in seiner allgemeinen Gestalt voraus, und man sieht auch hier, wie die Arithmetik mit der Einführung der positiven und negativen Größen oder zwei einander entgegengesetzter Richtungen die Nothwendigkeit der Betrachtung aller übrigen im Raume möglicher Richtungen in sich aufgenommen hat.

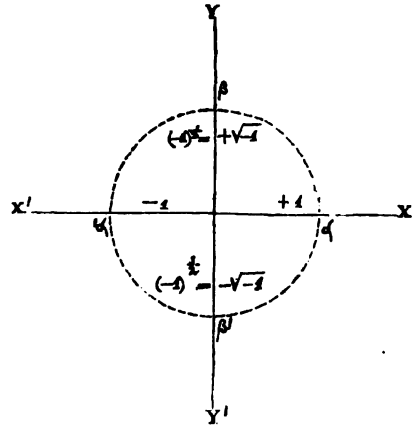
§. 35. Um jetzt näher auf die Darstellungsweise der in verschiedenen Richtungen gemessenen Längen durch arithmetische Zeichen einzugehen; so bemerkt man, daß die Geometrie die negativen Linien aus den positiven durch eine halbe Umdrehung

der erſteren um den Nullpunkt des Syſtemes erzeugt; durch eine nochmalige halbe Umdrehung einer negativen Linie wird alsdann wieder eine poſitive hergeſtellt. Die Arithmetik erzeugt dagegen die negativen Zahlen aus den poſitiven durch Multiplikation mit der Größe -1 und die poſitiven wiederum aus den negativen durch nachmalige Multiplikation mit -1. Man ſieht alſo, *daß einer halben Umdrehung in der Geometrie eine Multiplikation mit -1 in der Arithmetik* und einer ganzen Umdrehung in der Geometrie eine Multiplikation mit $(-1)^2=+1$ in der Arithmetik entſpricht.

Wenn dieſe Beziehung ſyſtematiſch verfolgt wird, ſo muß man ſchließen, daß, wenn einer Viertelumdrehung in der Geometrie eine Multiplikation mit der Größe α entſpräche, dieſes Zeichen zu dem Zeichen -1 in einer ſolchen Beziehung ſtehen müßte, daß durch nochmalige Multiplikation mit demſelben, alſo durch Multiplikation mit α^2, die negativen Zahlen entſtänden, weil deren geometriſche Repräſentanten durch eine nochmalige Viertelumdrehung aus den vorhergehenden erzeugt werden; eine fernere Multiplikation der bereits in α^2 multiplizirten Größen mit α oder eine unmittelbare Multiplikation der poſitiven Größen mit α^3 müßte alsdann Größen ergeben, welche geometriſch durch eine Drehung um 270° oder $\frac{3\pi}{2}$ aus der poſitiven Lage dargeſtellt würden; endlich müßte eine abermalige Multiplikation mit α oder eine urſprüngliche Multiplikation der poſitiven Größen mit α^4 wiederum poſitive Größen erzeugen. Da hiernach $\alpha^2=-1$ ſein muß; ſo hat man offenbar $\alpha=(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-1}$, $\alpha^3=(-1)\ (-1)^{\frac{1}{2}}=(-1)^{\frac{3}{2}}=-\sqrt{-1}$ und $\alpha^4=(-1)^{\frac{3}{2}}\ (-1)^{\frac{1}{2}}=(-1)^2=+1$.

In den in die Faktoren $\alpha=\sqrt{-1}$ und $\alpha^3=-\sqrt{-1}$ multiplizirten Größen erkennt man ſogleich ſogenannte *imaginäre* Zahlen von der in §. 21. allgemein dargeſtellten Form. Es geht hieraus hervor, daß durch den arithmetiſchen Ausdruck $(-1)^{\frac{1}{2}}a$ oder $a\sqrt{-1}$, worin a eine *abſolute* Zahl oder die *Quantität* einer Größe (§. 28) bezeichnet, geometriſch eine Linie von der abſoluten Länge a ausgedrückt wird, welche auf der reellen

Axe im Nullpunkte perpendikular steht; der Ausdruck $(-1)^{\frac{1}{2}}a$ oder $-a\sqrt{-1}$ stellt eine Linie von derselben Länge a dar, welche in der Verlängerung des eben erwähnten Perpendikels liegt. Die in dem Theile OY des Perpendikels Y'Y auf der



reellen Axe X'X liegenden Linien $+a\sqrt{-1}$ stehen zu den in dem Theile OY' liegenden Linien $-a\sqrt{-1}$ in derselben Beziehung, wie die positiven Linien $+a$ zu den negativen Linien $-a$. Wir wollen daher den Theil OY die positive und den Theil OY' die negative imaginäre Axe nennen, während OX die positive und OX' die negative reelle Axe bildet.

§. 36. Allgemeiner Ausdruck für den Richtungskoeffizienten.

Durch ein dem vorhergehenden ganz ähnliches Schlußverfahren findet man, daß wenn β das Zeichen ist, mit welchem die positiven Größen zu multipliziren sind, um Größen zu erzeugen, welche die Geometrie durch Drehung um den $2n$ten Theil einer ganzen Umdrehung oder um den $n$ten Theil einer halben Umdrehung von 180° erzeugt, man $\beta^n = -1$, also $\beta = (-1)^{\frac{1}{n}}$ zu setzen habe, und hieraus folgt, daß allgemein durch die Multiplikation der positiven Größen mit dem Faktor $\beta^m = (-1)^{\frac{m}{n}}$ sol-

che Größen erzeugt werden, welche die Geometrie durch eine Drehung um den Winkel $\frac{m}{n}.180^0$ oder, wenn man diesen Winkel nach dem Umfange des mit dem Halbmesser gleich der Längeneinheit beschriebenen Kreises mißt, durch eine Drehung um den Bogen $\frac{m}{n}\pi$ aus der positiven Richtung hervorbringt.

Die Größe $(-1)^{\frac{m}{n}}$, mit welcher die positiven Größen multiplizirt werden müssen, um in solche verwandelt zu werden, deren Richtung um den Bogen $\frac{m}{n}\pi$ von der positiven Richtung abstehen, wird hier als bloßes Zeichen, ähnlich wie die Zeichen $+$ und $-$ gebraucht; nennen wir dieselbe den Richtungskoeffizenten für die damit behaftete Größe. Da die Richtungen der mit den Zeichen $(-1)^0=+1$, $(-1)^{\frac{1}{n}}$, $(-1)^{\frac{2}{n}}$, $(-1)^{\frac{3}{n}}$, $\ldots(-1)^{\frac{n}{n}}=-1$, $\ldots(-1)^{\frac{2n-1}{n}}$ versehenen Größen sämmtlich verschieden sind, und immer um den Bogen $\frac{1}{n}\pi$ voneinander abstehen; so haben auch alle vorstehenden Koeffizienten verschiedene Werthe, und dürfen nicht nach gewissen Regeln der Potenzrechnung in Faktoren zerlegt werden, welche alsdann für sich miteinander multiplizirt und zu einem einfacheren Resultate zusammengezogen werden können. So würde man z. B. einen ganz falschen Begriff herbeiführen, wenn man den Richtungskoeffizienten $(-1)^{\frac{2}{n}}=((-1)^2)^{\frac{1}{n}}=(+1)^{\frac{1}{n}}=+1$ setzen wollte. Es leuchtet übrigens ein, daß die Exponenten $\frac{m}{n}$ unbedingt auf die kleinste Benennung gebracht werden dürfen, da z. B. $(-1)^{\frac{2m}{2n}}$ nicht bloß nach den gewöhnlichen Regeln der Potenzrechnung, sondern auch in der hier zu Grunde liegenden Bedeutung $=(-1)^{\frac{m}{n}}$ ist. Auch bemerkt man, daß wenn $m>2n$, also z. B. $=2n+r$ wird, $(-1)^{\frac{2n+r}{n}}=(-1)^{2+\frac{r}{n}}=(-1)^2\,(-1)^{\frac{r}{n}}=(-1)^{\frac{r}{n}}$ gesetzt werden darf, weil die Richtungen der Größen $(-1)^{\frac{2n+r}{n}}a$

und $(-1)^{\frac{r}{n}} a$ offenbar dieselben sind. Die ersteren unterscheiden sich nur dadurch von den letzteren, daß sie als durch eine Drehung um mehr, als 360°, aus der positiven Richtung entstanden gedacht werden. Will man indessen durch den Richtungskoeffizienten nicht bloß die Neigung der damit behafteten Größen gegen die positive Axe, sondern auch den absoluten Werth des Drehungswinkels bezeichnen, wie Dies z. B. bei den verschiedenen Vektorradien einer Spirale erforderlich ist; so darf man auch die letztere Reduktion nicht eintreten lassen, und muß den Ausdruck $(-1)^{\frac{2n+r}{n}}$ unverändert beibehalten.

Man findet leicht, daß in der aus $2n$ Gliedern bestehenden Reihe von Richtungskoeffizienten

$$(-1)^0, (-1)^{\frac{1}{n}}, (-1)^{\frac{2}{n}}. \ldots . (-1)^{\frac{2n-1}{n}}$$

sich die Eine Hälfte auf die Form $(-1)^{\frac{1}{n}}$ und die andere Hälfte auf die Form $-(-1)^{\frac{1}{n}}$ reduziren würde, wenn man die Regeln der Potenzrechnung darauf in Anwendung brächte. Soll nun aber die verschiedene Bedeutung jener Glieder aufrecht erhalten werden; so müßte die Größe $(-1)^{\frac{1}{n}}$ nothwendig fähig sein, n verschiedene Werthe anzunehmen. Von der Möglichkeit dieses Umstandes haben wir durch die bisherigen Operationen der Arithmetik noch keinen Aufschluß erhalten, werden aber weiter unten die Richtigkeit desselben einsehen.

Je zwei Richtungen, deren Exponenten um die Einheit verschieden sind, wie die beiden Richtungen, denen resp. die Koeffizienten $(-1)^{\frac{m}{n}}$ und $(-1)^{\frac{m+n}{n}}$ angehören, stehen offenbar um den Winkel 180° oder um den Bogen π voneinander ab und liegen mithin in derselben geraden Linie auf entgegengesetzten Seiten des Nullpunktes. Solche Richtungen heißen einander *entgegengesetzte*; die in ihnen liegenden Größen tragen dasselbe Verhältniß zu einander, wie die positiven zu den negativen.

Um auf die besondere Bedeutung des Koeffizienten $(-1)^{\frac{m}{n}}$ als bloßes *Zeichen* besser aufmerksam zu machen, wollen wir dafür im Folgenden $(-)^{\frac{m}{n}}$ oder einfach $(-)^m$ substituiren, und

dasselbe ganz analog dem Zeichen — gebrauchen, indem wir dasselbe vor die damit zu behaftende Größe setzen.

§. 37. Bedeutung des Richtungskoeffizienten, wenn sein Exponent negativ wird, und geometrisches Bild der fortlaufenden Reihe von sukzessiven Potenzen einer negativen Größe.

Im Vorstehenden ist angenommen, daß alle gegen die positive Richtung geneigten und allgemeinen durch $(-)^m a$ dargestellten Linien durch eine Drehung aus der positiven Lage nach Ein und derselben Seite herum erzeugt seien. Alle hierdurch gebildeten Linien von der absoluten Länge a werden eine stetige Reihe bilden, von welcher

$$(-)^0 a,\ (-)^{\frac{1}{4}} a,\ (-)^{\frac{2}{4}} a,\ (-)^{\frac{3}{4}} a,\ (-)^{\frac{4}{4}} a,\ (-)^{\frac{5}{4}} a \ldots$$

oder

$$+a,\ (-)^{\frac{1}{4}} a,\ (-)^{\frac{1}{2}} a,\ (-)^{\frac{3}{4}} a,\ -a,\ (-)^{\frac{5}{4}} a \ldots$$

einige in regelmäßigen Winkelabständen aufeinander folgende Glieder sind.

Steigt man von den höheren Gliedern dieser Reihe sukzessiv zu den niedrigeren herab, bringt also das Bildungsgesetz derselben in umgekehrter Richtung auf dieselben in Anwendung; so entspricht einer Subtraktion im Exponenten des Richtungskoeffizienten in geometrischer Bedeutung einer Drehung des Halbmessers a nach einer der früheren gerade entgegengesetzten Seite um den Nullpunkt herum. Bringt man daher das fragliche Gesetz auch noch ferner unterhalb des Anfangsgliedes $(-)^0 a = +a$ der vorstehenden Reihe in Anwendung; so begreift man leicht, daß die Größen

$$(-)^0 a,\ (-)^{-\frac{1}{4}} a,\ (-)^{-\frac{2}{4}} a,\ (-)^{-\frac{3}{4}} a,\ (-)^{-\frac{4}{4}} a,\ (-)^{-\frac{5}{4}} a \ldots$$

oder

$$+a,\ (-)^{-\frac{1}{4}} a,\ (-)^{-\frac{1}{2}} a,\ (-)^{-\frac{3}{4}} a,\ (-)^{-1} a,\ (-)^{-\frac{5}{4}} a \ldots$$

oder allgemein die Größe $(-)^{-m} a$ eine Linie von der absoluten Länge a darstelle, welche durch eine Drehung um den Bogen

$m\pi$ nach einer der früheren gerade entgegengesetzten Seite aus der positiven Lage entstanden ist.

Da die Richtung der Linie $(-)^{-m}a$ offenbar mit der Richtung der Linie $(-)^{2i-m}$, worin i irgend eine ganze positive Zahl ist, zusammenfällt; so kann man auch hier, wenn man nur die Richtung, und nicht die Größe des Bogens $m\pi$, betrachten will, $(-)^{-m} = (-)^{2i}\,(-)^{-m} = (-)^{2i-m}$ setzen, wodurch man in den Stand kommt, alle in einer Ebene möglichen Richtungsgrößen durch den allgemeinen Ausdruck $(-)^m a$ darzustellen, worin m eine absolute Zahl bezeichnet, welche <2 ist. Charakteristisch für die Linien, welche durch eine der anfänglichen entgegengesetzten Drehung um den Nullpunkt erzeugt sind, bleibt jedoch immer die Form $(-)^{-m}a$, und dieselbe muß ungeändert bleiben, wenn man den Gegensatz in der Drehung um den Nullpunkt hervorheben will.

Ferner erkennt man, daß wenn man nur die Neigung ins Auge faßt, welche eine Linie gegen die positive Axe besitzt, und man in deren Richtungskoeffizienten für den Exponenten sowol positive, wie negative Werthe zulassen will, man allgemein

$$(-1)^{\pm m} = (-1)^{2i\pm m}$$

setzen kann, worin i nicht bloß jede positive, sondern auch jede negative ganze Zahl bedeutet.

Aus den vorstehenden Untersuchungen erhellet nun auch, welche Vorstellung man mit den Werthen der stetig aufeinander folgenden Potenzen einer negativen Zahl zu verbinden habe. Setzt man $-a = (-1)a$, worin der Faktor (-1) den Richtungskoeffizienten und a die absolute Quantität der Größe $-a$ darstellt; so ist allgemein $(-a)^{\frac{m}{n}} = (-1)^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m}{n}} = (-)^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m}{n}}$, und die verschiedenen Potenzen von $-a$ bilden eine fortlaufende Reihe, von welcher

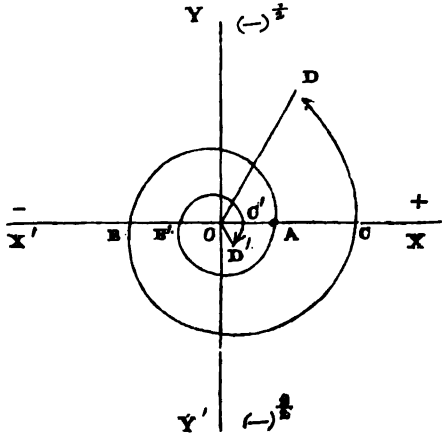
$$\ldots (-a)^{-\frac{2}{n}},\ (-a)^{-\frac{2}{n}},\ (-a)^{-\frac{1}{n}},\ (-a)^0,\ (-a)^{\frac{1}{n}},$$
$$(-a)^{\frac{2}{n}},\ (-a)^{\frac{3}{n}} \ldots$$

oder

$$\ldots (-)^{-\frac{3}{n}} a^{-\frac{3}{n}},\ (-)^{-\frac{2}{n}} a^{-\frac{2}{n}},\ (-)^{-\frac{1}{n}} a^{-\frac{1}{n}},\ +1,$$
$$(-)^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}},\ (-)^{\frac{2}{n}} a^{\frac{2}{n}},\ (-)^{\frac{3}{n}} a^{\frac{3}{n}} \ldots$$

einige der Richtung nach gleich weit voneinander abſtehende Glieder ſind.

Die geometriſchen Repräſentanten dieſer Glieder ſind offenbar die verſchiedenen Vektorradien einer logarithmiſchen Spirale,



welche ſich nach zwei entgegengeſetzten Seiten ins Unendliche um den Nullpunkt ſchlingt. Das Glied $(-a)^0 = +1$ entſpricht dem poſitiven Vektor OA, deſſen abſolute Länge gleich der Längeneinheit iſt; $(-a)^{-\frac{m}{n}} = (-)^{-\frac{m}{n}}\ a^{-\frac{m}{n}}$ würde durch den Vektor OD' und $(-a)^{\frac{m}{n}} = (-)^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m}{n}}$ durch den Vektor OD dargeſtellt werden. Die Vektoren OA, OB, OC, ſowie OB', OC', welche den Durchſchnittspunkten der Spirale mit der poſitiven und negativen Axe angehören, entſprechen denjenigen Gliedern der obigen Reihe, welche abwechſelnd poſitive und negative Werthe annehmen, und man erkennt leicht, wie durch die ſtetige Bewegung eines den Zug der Spirale durchlaufenden Punktes die plötzlichen Sprünge von den poſitiven Gliedern zu den negativen vermittelt werden, auf welche in §. 34 aufmerkſam gemacht iſt.

Die Grundoperationen der Arithmetik im allgemeinsten Sinne.

§. 38. Nachdem wir im Vorstehenden die Zahlen in ihren generellsten Formen, unter welchen dieselben sowol nach den Merkmale der Quantität, wie der Richtung, betrachtet sind, kennen gelernt haben, gehen wir dazu über, die Prinzipien der Grundoperationen der Arithmetik in ihren ausgedehntesten Bedeutungen näher zu entwickeln.

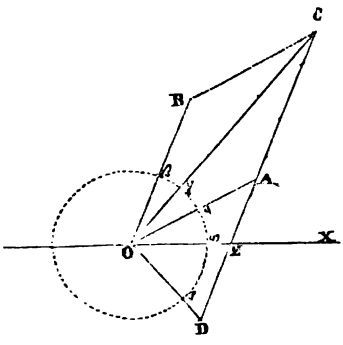
Addition.

Diese Operation verlangt, daß man eine gegebene Zahl (den ersten Summand) nach Maaßgabe des durch eine zweite Zahl (den zweiten Summand) vorgeschriebenen einfachen Gesetzes der Zahlenbildung um die Quantität und in der Richtung der letzteren Zahl weiterbilde. Denkt man sich die Zahlen als Linien; so ist der allgemeinste Begriff von Addition *ein Fortschreiten vom Endpunkte des ersten Summands in der Richtung und um die Quantität oder die absolute Länge des zweiten Summands.*

Die beiden zur Addition gegebenen Größen müssen, um ihren wahren Begriff zu erfassen, zuvörderst im Akte ihrer Entstehung vom Nullpunkte des ganzen Größensystems aus gedacht werden. In dieser Lage erhalten wir durch Vergleichung des Grades, bis zu welchem das Gesetz des *Fortschrittes* in gerader Linie an ihnen zur Ausbildung gekommen ist, die richtige Vorstellung von ihrer Verschiedenheit in *quantitativer* Hinsicht und durch Vergleichung des Grades, in welchem das Gesetz der *Drehung* im Kreise aus der positiven Axe an ihnen ausgebildet ist, die Vorstellung von ihrer Verschiedenheit hinsichtlich der *Richtung*. Bei der Addition soll nur die Summe lediglich durch einen *Fortschritt* vom Endpunkte des ersten Summands in der Richtung des zweiten um die absolute Quantität des letztern erzeugt werden. Fallen also die Richtungen der beiden Summande zusammen; so besteht die Addition nur in dem Weiterschreiten in der Richtung des ersten Summands um die Quantität des zweiten, gerade so, wie bei der Addition zweier positiver oder zweier negativer Größen. Hiernach hat man offenbar

$$(-)^m a + (-)^m b = (-)^m (a + b).$$

Iſt dagegen die Richtung des zweiten Summands von der des erſten verſchieden; ſo muß der Fortſchritt vom Endpunkte des erſten Summands in einer Richtung geſchehen, welche ſich gegen die poſitive Axe unter dem der Richtung des zweiten Summands zugehörigen Winkel neigt. Wenn z. B. die beiden Größen $(-)^m a$ und $(-)^n b$ addirt werden ſollten, ſo ſei OX die poſitive Axe, $O\omega = O\alpha = O\beta =$ der Längeneinheit, arc. $\alpha O\omega = \omega\alpha = m\pi$, arc. $\beta O\omega = \omega\beta = n\pi$, $\overline{OA} = a$. $\overline{O\alpha}$, $OB = b$. $\overline{O\beta}$; alsdann würden die Größen $(-)^m a$ und $(-)^n b$ geometriſch reſp. durch die Linien OA und OB dargeſtellt werden. Um dieſelben zu addiren, hat man vom Endpunkte A der Einen in einer Richtung EAC, welche mit der poſitiven Axe OX den Bogen $n\pi$ einſchließt, um die Quantität $AC = b$. $\overline{O\beta}$ der anderen Größe fortzuſchreiten. Die Linie OC ſtellt alsdann ſowol der Quantität, wie der Richtung nach, die Summe



$$(-)^m a + (-)^n b$$

dar. Setzt man arc $\gamma O\omega = \omega\gamma = s\pi$ und $OC = \overline{O\gamma}$; ſo wird die Linie OC durch $(-)^s c$ dargeſtellt, und man hat

$$(-)^m a + (-)^n b = (-)^s c.$$

Daß eine Linie, welche durch zwei an ihre Enden geſetzte Buchſtaben bezeichnet wird, ſowol ihrer Quantität, wie ihrer Richtung nach, betrachtet werden ſolle, wollen wir in Zukunft dadurch andeuten, daß wir die beiden Buchſtaben in Klammern ſchließen. Hiernach hat man

$$(OA) + (OB) = (OC).$$

In der Folge wird man ſehen, daß es behuf Erzeugung der Summe (OC) gleichgültig iſt, ob man (OB) zu (OA) oder (OA) zu (OB) addirt. Bei der letzteren Operation müßte man vom Endpunkte B der Linie OB in der Richtung BC, welche ſich

gegen die positive Axe unter dem Winkel $m\varkappa$ neigt, um die Quantität $BC=a.0_\alpha$ der Linie OA vorwärts schreiten. Beide Methoden führen immer in den Punkt C oder zu der einzigen Summe (OC).

§. 39. Subtraktion.

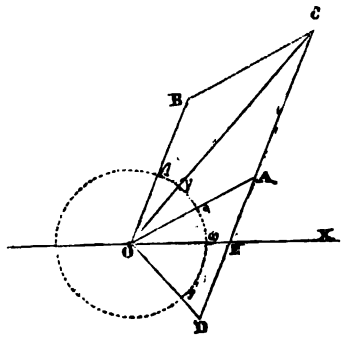
Die Subtraktion, welche die Operation der Addition wieder-aufzuheben bestimmt ist, fordert, daß man von dem Endpunkte des Minuends in der entgegengesetzten Richtung des Substrahends um die Quantität des Letzteren fort-schreite.

Hiernach hätte man für die Differenz zweier in derselben Richtung liegender Größen

$$(-)^m a-(-)^m b=(-)^m(a-b).$$

Wären die Richtungen der beiden zu subtrahirenden Größen verschieden, wie bei den beiden Summanden

$$(OA)=(-)^m a \text{ und } (OB)=(-)^n b$$



des vorhergehenden Paragraphs; so würde man, wenn die absolute Länge von AD gleich der von OB ist,

$$(OA)-(OB)=(OD)$$

haben. Setzt man den Bogen des im vierten Quadraten liegenden Winkels XOD, also arc. $XOD=\omega\beta\delta=s\varkappa$ und $OD=c.\ \overline{0\delta}$; so ist

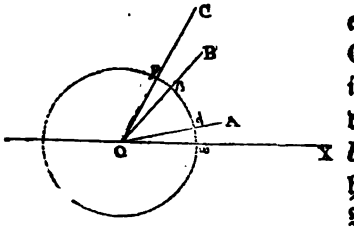
$$(-)^m a-(-)^n(b=-)^s c.$$

Aus dem Vorstehenden und aus Dem, was im §. 36 über entgegengesetzte Richtungen gesagt ist, geht hervor, daß sich eine Subtraktion zweier Größen immer auf eine Addition des in entgegengesetzter Richtung genommenen Subtrahends zu dem Minuende zurückführen läßt.

§. 40. Multiplikation.

Die Multiplikation verlangt, daß aus dem Multiplikande das Produkt gerade ſo gebildet werde, wie aus der poſitiven Einheit der Multiplikator durch Vervielfältigung und Theilung der Quantität jener Einheit und durch Veränderung der Richtung derſelben gebildet iſt.

Sind alſo OA und OB die geometriſchen Repräſentanten der beiden Faktoren $(-)^m a$ und $(-)^n b$, ſodaß wenn $O\omega = O\alpha = O\beta = O\gamma$ die Längeneinheit darſtellt, $OA = a \cdot \overline{O\alpha}$, $OB = b \cdot \overline{O\beta}$, $\omega\alpha = m\pi$, $\omega\beta = n\pi$ iſt; ſo hat man zuvörderſt, weil der Multiplikator $(-)^n b$ durch $b$maliges Setzen der poſitiven Einheit in ihrer Richtung oder durch Vervielfältigung ihrer Quantität um b und dann durch Drehung aus ihrer Lage um den Bogen $n\pi$ entſtanden iſt, die Quantität des Multiplikands $(-)^m a$, alſo die Größe a, $b$mal zu nehmen, wodurch man ab erhält, hierauf hat man die abſolute Länge $ab = \overline{OC}$ aus der durch den Richtungskoeffizienten $(-)^m$ des Multiplikands beſtimmten Richtung OA um den durch $(-)^n$ beſtimmten Winkel XOB, oder um den Bogen $n\pi$, weiter zu drehen, ſodaß die Linie OC, welche das geſuchte Produkt darſtellt, mit der poſitiven Richtung den Bogen $\omega\gamma = \omega\alpha + \omega\beta = (m+n)\pi$ einſchließt. Demnach hat man



$$(OA) \times (OB) = (OC) \quad \text{oder}$$

$$(-)^m a \times (-)^n b = (-)^{m+n} ab,$$

ein Reſultat, welches den ſonſtigen Regeln der Multiplikation von Potenzen Ein und derſelben Wurzel (—) vollkommen entſpricht.

Man ſieht leicht ein, daß der Werth des Produktes von der Reihenfolge unabhängig iſt, in welcher man die Multiplikation mit mehreren Faktoren vollzieht.

§. 41. Division.

Die Operation der Division, welche die durch Multiplikation gestiftete Verbindung trennen soll, begreift sich nach dem Vorstehenden leicht. Die Quantität des Dividends wird nach den Regeln der gemeinen Division durch die Quantität des Divisors dividirt, und die Drehung erfolgt aus der Lage des Dividends nach der entgegengesetzten Seite von der, in welcher der Divisor aus der positiven Richtung entstanden ist, um einen Winkel, welcher dem Neigungswinkel des Divisors gegen die positive Axe gleich ist.

Man hat nämlich

$$(-)^m a : (-)^n b = (-)^{m-n} \frac{a}{b},$$

oder wenn in der Figur des vorhergehenden Paragraphes $(-)^m a$ durch OC, $(-)^n a$ durch (OB) und $(-)^{m-n} \frac{a}{b}$ durch OA dargestellt wird; so ist

$$(OC) : (OB) = (OA).$$

§. 42. Bei der Multiplikation und Division geschieht die Vervielfältigung und Theilung der Quantität nach den Regeln der Multiplikation und Division absoluter Zahlen. Die durch die Multiplikation und Division vorgeschriebene Richtungsveränderung, welche ebenfalls durch die Multiplikation und Division der Richtungskoeffizienten dargestellt wird, reduzirt sich auf eine Addition und Subtraktion der durch diese Koeffizienten näher bestimmten Winkel- oder Bogengrößen. Im Obigen (§. 36 und 37) ist nun gezeigt, daß der Exponent m in der allgemeinen Zahlform $(-)^m a$ nur eine positive Zahl < 2 zu sein braucht, weil die Werthe dieses Koeffizienten sich regelmäßig wiederholen, wenn $m > 2$ würde. Es fragt sich aber, ob es hinsichtlich des aus zwei solchen Größen entstehenden Produktes oder Quotienten ebenfalls gleichgültig ist, ob man annimmt, daß die Drehung derselben um einen Bogen $= m\pi$, welcher $< 2\pi$ ist, geschehen sei, oder ob man annimmt, daß jene Größen durch eine Drehung um den Bogen $2\pi + m\pi$ oder allgemein um den Bogen $(2i + m)\pi$, wovon i irgend eine positive oder auch negative ganze Zahl bedeutet, erzeugt seien.

Es leuchtet ein, daß eine ſolche Annahme auf den Werth des Produktes oder Quotienten keinen Einfluß haben kann, da ſowol der Quantität wie der Richtung nach, ganz allgemein

$$(-)^{2i_1+m}a\times(-)^{2i_2+n}b=(-)^{2(i_1+i_2)+m+n}ab=(-)^{m+n}ab$$

iſt. Man hat ſich nur das durch $(-)^{2(i_1+i_2)+m+n}ab$ dargeſtellte Produkt, wie durch eine (i_1+i_2)malige ganze Umdrehung um ſich ſelbſt und alsdann noch durch eine Drehung um den Bogen $(m+n)\pi$ entſtanden zu denken.

Wenn die Entſtehung der zu multiplizirenden oder zu dividirenden Größen aus der poſitiven Einheit ſowol der Quantität, wie der Richtung nach, unzweideutig gegeben iſt, wie Dies bei den verſchiedenen Vektorradien einer Spirale der Fall iſt; ſo fällt auch die vorbemerkte Idee über die vieldeutige Entſtehungsweiſe der Größen aus der poſitiven Einheit hinweg, und die Richtung des Produktes oder des Quotienten, deren arithmetriſcher und geometriſcher Werth ſtets einzig iſt, kann auch nur als durch Eine beſtimmte Art der Drehung aus der poſitiven Einheit hervorgegangen gedacht werden.

§. 43. Potenziirung und Wurzelausziehung.

Wenn der Exponent eine poſitive oder auch eine negative ganze Zahl iſt; ſo läuft die Potenziirung auf eine mehrmals mit der Wurzel wiederholte Multiplikation oder Diviſion hinaus. Nach §. 40 und 41 hat man alſo für dieſen Fall, wo r eine ganze Zahl iſt,

$$[(-)^m a]^r=(-)^{rm}a^r=(-)^{2i+rm}a^{rm},$$
$$[(-)^m a]^{-r}=(-)^{-rm}a^{-r}=(-)^{2i-rm}\frac{1}{a^r};$$

hierin bezeichnet i irgend eine poſitive oder negative ganze Zahl, welche man immer ſo wählen kann, daß $2i-rm$ poſitiv und <2 iſt (ſ. §. 37).

Da hier die Regeln der Multiplikation und Diviſion gelten; ſo ſieht man, daß die Quantität der zu potenziirenden Größe nach den für die abſoluten Zahlen gegebenen Vorſchriften potenziirt wird. Die Richtungsveränderung geſchieht ſo, daß der Akt

der Drehung, durch welche die Wurzel aus der positiven Lage entstanden ist, in demselben Maaße so oft wiederholt wird, als der Exponent r Einheiten enthält. Wenn r negativ ist; so wird die Richtung der Potenz erhalten, wenn man die Quantität $\frac{1}{a^r}$ derselben aus der positiven Lage um das $r$fache des Neigungswinkels $m\pi$ der Wurzel gegen die positive Axe, also um den Winkel $rm\pi$, rückwärts drehet.

Wenn die Wurzel nicht etwa durch den Vektoradius einer Spirale bestimmt wäre; so kann man annehmen, daß dieselbe beliebig viele ganze Umdrehungen um den Nullpunkt nach der Einen oder anderen Seite herum erlitten habe, bevor sie aus der positiven Richtung in ihre wirkliche Lage gekommen ist, daß also ihr Richtungskoeffizient allgemein durch $(-)^{2i+m}$ ausgedrückt sei. Hierdurch würden die Potenzen $[(-)^{2i+m}a]^r = (-)^{2ir+mr}a^r$ eine unendliche Menge verschiedener Bedeutungen erhalten, jenachdem man die ganze Zahl i variiren ließe. Wenn jedoch r eine ganze Zahl ist; so wird auch $2ir$ eine solche und $(-)^{2ir+mr} = (-)^{mr}$ sein, und man erkennt, daß alle jene Potenzen mit der durch $(-)^{mr}a^r$ dargestellten zusammenfallen werden.

Anders verhält sich Dies, wenn der Exponent der Potenz eine gebrochene Zahl $\frac{r}{s}$ ist. Die durch

$$[(-)^m a]^{\frac{r}{s}} = (-)^{\frac{rm}{s}} a^{\frac{r}{s}} = (-)^{2i+\frac{rm}{s}} a^{\frac{r}{s}} \text{ und}$$

$$[(-)^m a]^{-\frac{r}{s}} = (-)^{-\frac{rm}{s}} a^{-\frac{r}{s}} = (-)^{2i-\frac{rm}{s}} \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}$$

dargestellte Operation der Potenziirung fordert alsdann, daß die Quantität der Wurzel zuvörderst nach den Regeln für die absoluten Zahlen potenzirt, also in s gleiche Faktoren zerlegt und ein solcher Faktor r mal mit sich selbst multiplizirt werde, daß ferner der Neigungswinkel $m\pi$ der Wurzel gegen die positive Axe in s gleiche Theile getheilt und ein solcher Theil r mal genommen werde. Für den Fall, daß der Exponent eine negative gebrochene Zahl $-\frac{r}{s}$ wäre, würde man die Quantität $\frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}$ der Po-

tenz um den Bogen $\frac{rm}{s}\pi$ aus der positiven Richtung **rückwärts** zu drehen haben.

Nimmt man nun auch hier den Neigungswinkel der Wurzel, statt zu $m\pi$, worin $m<2$ ist, allgemein zu $(2i+m)\pi$ an, und substituirt für i nachundnach zuvörderst die positiven ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3 ...; so kann jener Neigungswinkel sukzessive die Werthe

$$m\pi,(2+m)\pi,(4+m)\pi...[2(s-1)+m]\pi,(2s+m)\pi,[2(s+1)+m]\pi...$$

annehmen. Das $\frac{r}{s}$ fache dieses Winkels wird also resp.

$$\frac{mr}{s}\pi,\left(\frac{2r}{s}+\frac{mr}{s}\right)\pi,\left(\frac{4r}{s}+\frac{mr}{s}\right)\pi\ldots$$

$$\left[\frac{2(s-1)r}{s}+\frac{mr}{s}\right]\pi,\left(2r+\frac{mr}{s}\right)\pi,\left(2r+\frac{2r}{s}+\frac{mr}{s}\right)\pi\ldots$$

sein können. Man sieht, daß die s ersten Glieder dieser Reihe voneinander verschiedene Werthe haben und ebensoviel verschiedene Richtungen bezeichnen, welche immer um die Bogengröße $\frac{2r}{s}\pi$ voneinander abstehen, daß die durch die späteren Glieder dargestellten Richtungen aber mit den ersteren periodisch zusammenfallen, da dieselben von den letzteren immer nur um ganze Vielfache des Bogens 2π verschieden sind.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man für i nachundnach die negativen ganzen Zahlen $0,-1,-2,-3\ldots$ substituirt. Man findet zugleich, daß die durch negative Werthe von i erhaltenen Potenzen in umgekehrter Reihenfolge mit den vorhergehenden übereinstimmen, sodaß immer eine durch den Exponenten $\frac{-2jr}{s}+\frac{mr}{s}$ bestimmte Potenz mit der durch den Exponenten $\frac{2(s-j)r}{s}r+\frac{mr}{s}=2r-\frac{2jr}{s}+\frac{mr}{s}$ bestimmten einerlei Werth hat.

Hieraus folgt, daß die Potenz irgend einer (positiven, negativen oder imaginären) Zahl, deren Exponent ein Bruch $\frac{r}{s}$ ist, ebensoviel der Richtung nach

verschiedene Werthe hat, als der Nenner s des Exponenten Einheiten enthält. Wenn der Exponent eine irrationale Zahl ist; so wird diese Anzahl von verschiedenen Potenzen unendlich groß, da eine solche Zahl immer als ein Bruch mit unendlich großem Zähler und Nenner angesehen werden kann.

Hinsichtlich der Wurzelausziehung, welche die durch die Potenziirung gestiftete Verbindung trennen soll, finden keine besondere Bemerkungen statt, da diese Operation in der Erhebung zu Potenzen mit gebrochenen Exponenten mit enthalten ist (s. §. 19).

Darstellung aller Zahlen als Summen von zwei Theilen, welche in den Richtungen zweier rechtwinkliger Axen gemessen sind.

§. 44. Vorläufige Darstellung der Zahlen als Potenzen Ein und derselben Wurzel a.

Bei den früheren Untersuchungen ist die arithmetische Bezeichnung der verschiedenen in einer Ebene liegenden Linien durch die Richtungskoeffizienten von der Form $(-)^m r$, worin r die absolute Quantität und $m\pi$ den Neigungswinkel der Linie gegen die positive Axe darstellt, auf eine ganz einfache Weise geschehen, welche zugleich die Quantität und die Richtung der fraglichen Linie unmittelbar erkennen läßt. Behuf Entwickelung der verschiedenen aus dem Rechnen mit solchen Größen hervorgehenden Resultate gewährt es jedoch anderweitige große Vortheile, wenn man dieselben als die Summen zweier Theile darstellt, welche in den Richtungen zweier ein für alle Mal fest angenommener Axen gemessen sind. Wenn die Neigungswinkel dieser beiden Axen gegen die positive Richtung resp. s und t wären, so würde eine jede Linie, wie $(-)^m r$ auf die Form

$$(-)^m r = (-)^s a + (-)^t b$$

gebracht werden, worin die Quantitäten a und b der beiden Theile noch näher zu bestimmen wären.

Diese Darstellungsweise würde offenbar die größte Einfachheit erreichen, wenn man für die beiden in Rede stehenden Axen

reſp. die nach beiden Seiten verlängerte poſitive und die auf derſelben perpendikular ſtehende, gleichfalls nach beiden Seiten verlängerte Axe annähme. Für dieſe Vorausſetzung würde $s=o$ und $t=\frac{1}{4}$ werden, und alle Größen würden unter der Form

$$(-)^m r=(-)^0 a+(-)^{\frac{1}{2}} b=a+b\sqrt{-1}$$

erſcheinen, worin r immer als absolute Zahl gedacht wird, a und b aber ſowol poſitiv wie negativ ſein kann (ſ. §. 35).

Um zu der vorbemerkten Entwickelung zu gelangen, betrachte man die ſtetig fortlaufende Reihe der ſukzeſſiven reellen Potenzen Ein und derſelben Wurzel, und nehme für dieſelbe die abſolute Zahl a an. Einzelne regelmäßig aufeinander folgende Glieder dieſer Reihe ſind

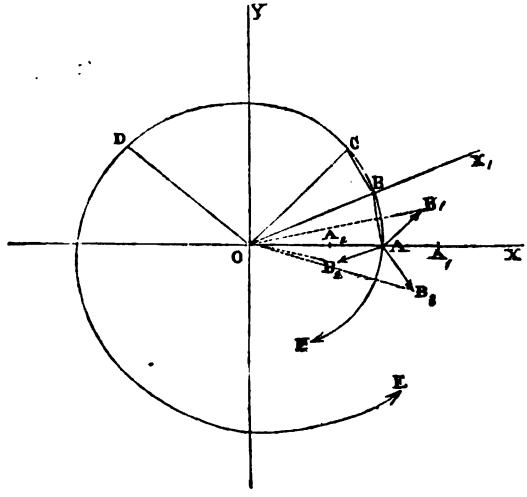
$$\ldots a^{-\frac{4}{3}}\ a^{-\frac{3}{3}}\ a^{-\frac{2}{3}}\ a^{-\frac{1}{3}}\ a^{0}\ a^{\frac{1}{3}}\ a^{\frac{2}{3}}\ a^{\frac{3}{3}}\ a^{\frac{4}{3}}\ldots$$

Sämmtliche Glieder der Reihe ſind abſolute Zahlen. Wenn $a>1$ iſt; ſo ſtellen die Glieder auf der linken Seite Zahlen dar, welche, von der Einheit $a^0=1$ anfangend, immer kleiner werden und ſich ohne Ende dem Werthe Null nähern; die rechte Seite liefert dagegen Zahlen, welche, von derſelben Einheit anfangend, ins Unendliche wachſen. Wäre $a<1$, ſo würden die Glieder auf der linken Seite wachſen und die auf der rechten abnehmen: für $a=1$, würden alle Glieder der obigen Reihe gleich der Einheit werden.

Wenn nun aber a von der Einheit verſchieden iſt; ſo ſpricht ſich in dem Syſteme der obigen Größen, welche ſämmtlich abſolute Werthe haben, doch ein Fortſchreiten nach zwei einander direkt entgegengeſetzten Richtungen aus; für die Glieder auf der rechten Seite der Größe $a^0=1=(OA)$ nämlich ein Fortſchreiten in der poſitiven Richtung AX, und für die Glieder auf der linken Seite ein Fortſchreiten in der entgegengeſetzten, dem Nullpunkte zugekehrten, negativen Richtung AO. Die Glieder, welche einem Fortſchritte des beſchreibenden Punktes in der poſitiven Richtung AX entſprechen, ſind in der allgemeinen Form a^φ enthalten, worin φ eine poſitive Zahl iſt; die anderen Glieder, welche einem Fortſchritte jenes Punktes in der negativen Rich-

tung AO entsprechen, sind dagegen in der Form $a^{-\varphi}$ enthalten, worin der Exponent eine negative Zahl ist.

So gut nun der beschreibende Punkt, dessen Bewegungsgesetz durch die allgemeine Form der Potenz a^{φ} dargestellt ist, in den



beiden entgegengesetzten Richtungen AX und AO, vom Endpunkte A der Längeneinheit ausgehend, fortschreitet, um in derselben die verschiedenen Abstände $(OA_1)=a^{\varphi}$ und $(OA_2)=a^{-\varphi}$ zu begränzen, ebenso gut kann derselbe offenbar von A aus in jeder andern Richtung, wie AB_1, AB, AB_2, AB_3 ... fortschreiten, um die gegen die Axe OX geneigten Linien (OB_1), (OB), (OB_2), (OB_3)... zu begränzen. Durch die letzteren Linien werden die stetigen Übergänge dargestellt, welche zwischen einem Anwachsen der Linie OA von A gegen X und einer Abnahme derselben in entgegengesetzter Richtung von A gegen O liegen. Sollen nun die arithmetischen Ausdrücke der geneigten Linien (OB_1), (OB)... ebenfalls in der Potenzform a^{φ}, worin a als eine unveränderliche absolute Größe angesehen wird, enthalten sein; so leuchtet nach §. 33 ein, daß dieselben der speziellen Form $a^{(-)^m\varphi}$ angehören werden, in welcher der Richtungskoeffizient $(-)^m$ des Exponenten $(-)^m\varphi$ die stetigen Übergänge aus der durch den Koeffizienten + oder $(-)^0$ des Exponenten

φ dargeſtellten poſitiven Richtung in die durch den Koefflzienten — oder $(-)^1$ des Exponenten in $-\varphi$ dargeſtellten negativen Richtung angibt.

Betrachten wir jetzt die Reihe von Gliedern, welche ſich ergibt, wenn man in der Form $a^{(-)^m \varphi}$ unter Beibehaltung des Richtungskoeffizienten $(-)^m$ des Exponenten nur deſſen abſolute Quantität φ variiren läßt.

Für $\varphi = o$ wird der Ausdruck $a^{(-)^m \varphi} = a^0 = 1$, und ſtellt die poſitive Längeneinheit OA dar.

Nimmt man nun an, durch Multiplikation dieſer poſitiven Einheit mit der Zahl $a^{(-)^m \varphi}$ entſtehe der Vektor

$$(OB) = a^0 \times a^{(-)^m \varphi} = a^{(-)^m \varphi};$$

ſo wird, wenn man die von A nach dem Endpunkte B jenes Vektors gezogene Linie (AB) mit $(-)^n b$ bezeichnet, worin b gleich der abſoluten Länge von (AB) und $n\pi$ gleich arc. BAX iſt (§. 36), (OB) die Summe der beiden Linien (OA) und (AB) ſein müſſen (§. 38), d. h. es muß ſein

$$(OB) = (OA) + (AB) \text{ oder}$$

$$a^{(-)^m \varphi} = 1 + (-)^n b;$$

hieraus folgt auch, daß

$$(AB) = (-)^n b = a^{(-)^m \varphi} - 1 \qquad \ldots\ldots (1)$$

ſein müſſe.

Denkt man ſich jetzt die poſitive Axe in die Richtung OBX_1 verlegt, und ſieht den Vektor OB als poſitive Längeneinheit an; ſo wird durch Multiplikation desſelben mit $a^{(-)^m \varphi}$ (worin nun a das $a$fache der neuen Einheit OB bezeichnet) ein Vektor erhalten, welcher durch OC dargeſtellt werde. Zieht man die Gerade BC, deren abſolute Länge (durch die Einheit OB gemeſſen) gleich b_1, iſt und für welche $n_1 \pi$ den Bogen des Neigungswinkels CBX_1 gegen die neue poſitive Axe OX_1 bezeichnet; ſo wird auch hier, ebenſo, wie vorhin

$$(BC) = (-)^{n_1} b_1 = a^{(-)^m \varphi} - 1 \qquad \ldots\ldots (2)$$

sein. Nun sind zwar in den beiden Ausdrücken für (AB) und (BC) die Einheiten verschieden, nach welchen in dem ersteren die Quantitäten b, a und 1 und in dem letzteren die Quantitäten b_1, a und 1 gemessen sind; es leuchtet jedoch ein, daß dieser Umstand auf die Richtungen, welche im ersteren Falle die Linien OB und AB gegen die Axe OX und im letzteren die Linien OC und BC gegen die Axe OX_1 annehmen werden, keinen Einfluß hat, und daß diese Richtungen resp. einander gleich sein müssen. Denn die Linie (OB), welche nach dem Obigen $= a^{(-)^m \varphi}$ sein soll, kann man auch, wenn man die absolute Länge derselben mit c und arc. BOX mit $s\pi$ bezeichnet, gleich $(-)^s c$ setzen. Bei einer Multiplikation dieser Größe mit irgend einer andern werden nur die Quantitäten beider multiplizirt, die Neigungswinkel aber addirt (§. 40 und 42); so entsteht denn auch durch Multiplikation der Einheit (OA) = 1 mit $(-)^s c$ der Vektor (OB). Außerdem hat man

$$(AB) = (OB) - (OA), \text{ d. i. nach Gleichung (1)}$$
$$(-)^n b = (-)^s c - 1. \qquad \ldots\ldots (3)$$

Sieht man jetzt OB als Längeneinheit an, verlegt die positive Axe in OBX_1, und stellt in derselben Weise die Größe $(-)^s c$ her; so erhält man den Vektor (OC), dessen Neigung gegen OX_1 der Neigung von OB gegen OX gleich ist, und welcher außerdem mit dem vorhin für (OC) erhaltenen Werthe identisch sein muß, da derselbe durch Multiplikation der Einheit mit dem Faktor $(-)^s c$ erzeugt ist, während der frühere durch Multiplikation der Einheit mit dem Faktor $a^{(-)^m \varphi}$, welcher ebenfalls $= (-)^s c$ sein soll, erhalten wurde. Hieraus folgt

$$(BC) = (OC) - (OB) = (-)^s c - 1,$$

und daher wegen Gleichung (2)

$$(-)^{n_1} b_1 = (-)^s c - 1,$$

worin b_1 die absolute Länge von (BC), durch die Länge OB als Einheit gemessen, darstellt. Substituirt man hierin für die neue Einheit OB = 1 ihren Werth c in Beziehung zu der anfänglichen Einheit OA; so erhält man offenbar

$$(-)^{n_1} b_1 c = (-)^n cc - c,$$

und demnach auch wieder, wenn man mit c dividirt,

$$(-)^{n_1} b_1 = (-)^n c - 1. \qquad \ldots\ldots (4)$$

In dieſer Gleichung beziehen ſich ſämmtliche Quantitäten auf die Einheit OA, und da Dies auch in der Gleichung (3) der Fall iſt; ſo folgt; wenn man die Werthe von $(-)^n c - 1$ aus beiden einander gleich ſetzt, daß

$$(-)^{n_1} b_1 = (-)^n b \qquad \ldots\ldots (5)$$

ſein müſſe. Wenn aber zwei Größen einander gleich ſein ſollen; ſo iſt es offenbar nothwendig, daß ſowol ihre Quantitäten, wie ihre Richtungen einander gleich ſeien. Demnach zerfällt die vorſtehende Gleichung in die beiden folgenden

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = b \text{ und } (-)^{n_1} = (-)^n, \\ \qquad \text{oder } n_1 = n \\ \text{oder } \sphericalangle \mathrm{CBX}_1 = \sphericalangle \mathrm{BAX}. \end{array}\right\} \ldots\ldots (6)$$

Hieraus folgt der zu erweiſende Satz, daß die abſolute Länge von BC zu OB in demſelben Verhältniſſe ſteht, wie die abſolute Länge von AB zu OA, und daß der Neigungswinkel von BC gegen die Axe OX_1 gleich dem Neigungswinkel von AB gegen die Axe OX iſt.

Wenn man den Vektor $(\mathrm{OB}) = a^{(-)^m \varphi} = (-)^n c$ wiederum mit der Größe $a^{(-)^m \varphi} = (-)^n c$ multiplizirt, ohne jedoch hierbei die urſprüngliche Längeneinheit zu ändern; ſo ergibt ſich für den Vektor (OC) der Werth

$$(\mathrm{OC}) = a^{(-)^m 2\varphi} = (-)^{2n} c^2.$$

Hieraus folgt, daß, wenn die abſolute Länge des Vektors $\mathrm{OB} \gtreqless \mathrm{OA}$, oder wenn $c \gtreqless 1$ iſt, auch die abſolute Länge des Vektors $\mathrm{OC} \gtreqless$ der des Vektors OB ſein wird.

Fährt man in dieſer Weiſe fort, die nächſt höheren ganzen Potenzen von $a^{(-)^m \varphi}$ zu bilden; ſo erhält man Größen, deren

Quantitäten entweder fortwährend wachsen oder fortwährend abnehmen oder sich fortwährend gleich bleiben, während die Winkel BOX, COX_1 etc., welche dieselben mit einander einschließen, sowie die Neigungswinkel BAX, CBX_1 etc. der Verbindungslinien AB, BC etc. ihrer Endpunkte gegen die vorhergehenden Vektoren stets einander gleich bleiben und resp. gleich $s\varkappa$ und $n\varkappa$ sind.

Dieses Gesetz behält offenbar auch dann noch vollkommene Richtigkeit, wenn man die Zahl φ im Exponenten der Potenz $a^{(-)^{\frac{m}{n}}\varphi}$ unendlich klein annimmt. In diesem Falle ergeben die Endpunkte aller durch die successiven ganzen Potenzen von $a^{(-)^{\frac{m}{n}}\varphi}$ dargestellten Radien eine stetige Kurve ABCD..., deren Vektoren entweder fortwährend wachsen oder abnehmen oder sich gleich bleiben, und bei welcher die Neigungswinkel der verschiedenen Elemente AB, BC etc. gegen die Vektoren in der ganzen Ausdehnung der Kurve Ein und denselben Werth behalten.

Soll nun der Fall eintreten, daß die absoluten Längen der Vektoren dieser Kurve stets denselben Werth behalten, oder daß die Kurve selbst in einer Kreislinie zusammenläuft; so müssen die Neigungen ihrer Elemente gegen die Radien offenbar gleich $\frac{\pi}{2}$ sein, sodaß, wenn man sich das Element AB unendlich klein denkt, dasselbe durch $(-)'b = (-)^{\frac{1}{2}}b$ oder auch nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise durch $b\sqrt{-1}$ dargestellt wird. Denn hätte dieses Element irgend einen anderen Richtungskoefficienten $(-)'$; so könnte man dasselbe, da es nicht mit einer in A errichteten auf OX perpendikular stehenden oder imaginären Axe zusammenfiele, als die Summe $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ darstellen, worin der Theil α in der Richtung der Axe OX und der Theil $\beta\sqrt{-1}$ in der darauf rechtwinklig stehenden Richtung gemessen wäre. Alsdann würde aber auch der Vektor $(OB) = (OA) + (AB) = 1 + \alpha + \beta\sqrt{-1}$ fortwährend ein Bestreben haben, in der Richtung seiner absoluten Länge um die Größe α zu wachsen, und könnte mithin bei fortgesetzter Drehung unmöglich eine gleiche Länge behalten.

§. 45. Entwickelung der allgemeinen Zahlform $a^{(-)^m\varphi}$ in eine Reihe.

Entwickelt man jetzt nach der bekannten Exponentialreihe, deren Gesetz in §. 24 ganz allgemein nachgewiesen ist, den Werth der Größe $a^{(-)^m\varphi}$, und setzt zu diesem Behufe $a = e^n$, worin e die Basis der natürlichen Logarithmen und n den natürlichen Logarithmus von a bezeichnet; so erhält man

$$a^{(-)^m\varphi} = e^{(-)^m n\varphi} = 1 + (-)^m n\varphi + \frac{[(-)^m n\varphi]^2}{1.2} + \frac{[(-)^m n\varphi]^3}{1.2.3} + \text{etc.} \ldots (7)$$

Wenn man hierin die Größe $\varphi = o$ setzt; so ergibt sich $a^{(-)^m\varphi} = 1$, was ganz in der Ordnung ist: nimmt man aber φ nur sehr klein an; so kann man sich dasselbe so gering denken, daß alle in die zweite und in noch höhere Potenzen von φ multiplizirten Glieder gegen das Glied $(-)^m n\varphi$ verschwinden. Für diesen Fall erhält man

$$a^{(-)^m\varphi} = 1 + (-)^m n\varphi. \quad \ldots . (8).$$

Der Werth von $a^{(-)^m\varphi} = (OB)$ wird also hier durch eine Summe dargestellt, deren erster Theil die Einheit OA ist, und deren anderer Theil $(-)^m\varphi n$ mithin gleich der Linie (AB) sein muß, deren absolute Quantität $AB = n\varphi$ ist, und welche sich unter dem Winkel $BAX = m\pi$ gegen die Axe OX neigt. Soll nun die durch die Endpunkte aller dieser Radien bestimmte Kurve eine Kreislinie sein; so hat man schon gesehen, daß für diesen Fall die Linie (AB) durch einen Ausdruck von der Form $(-)^{\frac{1}{2}}b$ dargestellt werden muß. Hieraus folgt, daß, um diesen Fall der Kreislinie zu erhalten, der Richtungskoeffizient im Exponenten der Potenz $a^{(-)^m\varphi}$

$$(-)^m = (-)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$$

gesetzt werden müsse. Geschieht Dies; so ergibt sich

$$a^{\varphi\sqrt{-1}} = e^{n\varphi\sqrt{-1}} = 1 + n\varphi\sqrt{-1} - \frac{(n\varphi)^2}{1.2} - \frac{(n\varphi)^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \frac{(n\varphi)^4}{1.2.3.4} + \frac{(n\varphi)^5}{1.2.3.4.5}\sqrt{-1} - \text{etc.}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \left[1 - \frac{(n\varphi)^2}{1.2} + \frac{(n\varphi)^4}{1.2.3.4} - \frac{(n\varphi)^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}\right] \\ &+ \left[n\varphi - \frac{(n\varphi)^3}{1.2.3} + \frac{(n\varphi)^5}{1.2.3.4.5} - \frac{(n\varphi)^7}{1.2.3.4.5.6.7.} + \text{etc.}\right]\sqrt{-1} \end{aligned}\right\} \ldots (9).$$

Wenn man das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung mit α und den Faktor von $\sqrt{-1}$ im zweiten Gliede mit β bezeichnet; so stellt sich der vorstehende Ausdruck in der Form

$$a^{\varphi\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \ldots . (10)$$

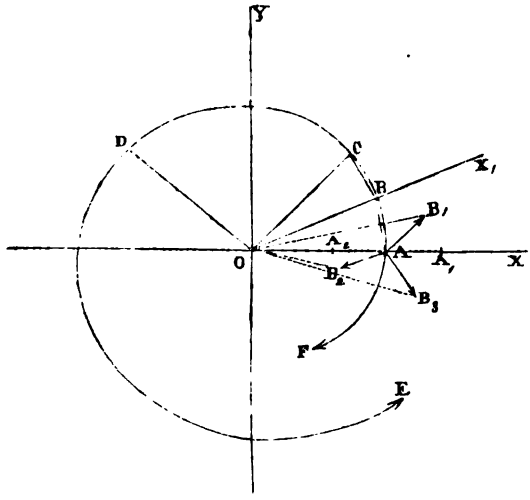
dar. Hieraus erkennt man, daß der Werth von $a^{\varphi\sqrt{-1}}$ als die Summe zweier Theile gegeben wird, von welchen der erstere in der reellen Are und der letztere in einer auf dieser perpendikular stehenden imaginären Are liegt, sodaß, wenn man sich von dem Endpunkte des Radius ein Perpendikel auf die reelle Are gefällt denkt, der erste Theil dieses Ausdruckes den Abstand des Perpendikels vom Nullpunkte und der letztere das Perpendikel selbst darstellt. Je nachdem α positiv oder negativ ausfällt, liegt der Fußpunkt dieses Perpendikels in dem positiven oder negativen Theile der reellen Are, und jenachdem β einen positiven oder negativen Werth annimmt, liegt das Perpendikel in der Richtung des positiven oder negativen Theiles der imaginären Are, d. h. oberhalb oder unterhalb der reellen Are.

Denkt man sich jetzt wieder die Größe φ so klein, daß alle späteren Glieder der vorstehenden Reihe gegen das in die erste Potenz von φ multiplizirten Glieder verschwinden, und bezeichnet dieselbe unter dieser Voraussetzung der ungemeinen Kleinheit mit ψ, so wird

$$a^{\psi\sqrt{-1}} = e^{n\psi\sqrt{-1}} = 1 + n\psi\sqrt{-1},$$

und, wie schon früher erwähnt, stellt alsdann $n\psi\sqrt{-1}$ das ungemein kleine Kreiselement (A B) dar, dessen Richtungskoeffizient $\sqrt{-1}$ und dessen absolute Länge $n\psi$ ist. Nun kann man diesen Radius $a^{\psi\sqrt{-1}}$, dessen absolute Länge fortwährend gleich der Ein-

heit bleibt, durch $(-)^r 1$ bezeichnen, worin der Werth von r durch die Beziehung $r\pi = \text{arc. BOA}$ bestimmt ist. Da aber ABC...



selbst ein Kreis vom Halbmesser $OA = 1$ ist; so hat man arc. $BOA = AB$, und es ergibt sich demnach, da die Länge von AB auch $= n\psi$ ist, zwischen den Größen r und ψ die Beziehung

$$r\pi = n\psi \text{ oder } \psi = \frac{r}{n}\pi.$$

Multiplizirt man nun die Zahl $(-)^r 1 = a^{\psi r\sqrt{-1}} = e^{n\psi r\sqrt{-1}}$ nochmals mit sich selbst; so erhält man nach den Regeln der Multiplikation die Linie (OC), deren Quantität ebenfalls gleich 1 ist, weil die Quantitäten der beiden Faktoren $= 1$ sind, und bei welcher der Winkel COB gleich dem Winkel BOA ist: da aber arc. $BOA = r\pi = n\psi$ ist; so hat man auch arc. $COB = r\pi = n\psi$. Außerdem ergibt die erwähnte Multiplikation den arithmetischen Ausdruck

$$(-)^{2r} 1 = e^{2n\psi r\sqrt{-1}},$$

in welchem also $2n\psi$ den Bogen $AC = 2AB$ darstellt, und $2r\pi = 2n\psi$ ist.

Setzt man diese Multiplikation oder Potenziirung von

$(-)^r 1 = e^{n\psi\sqrt{-1}}$ fort; so erhält man nach $m$maliger Potenziirung

$$(-)^{mr} 1 = e^{mn\psi\sqrt{-1}},$$

worin, wenn $AD = m \times AB = m \times n\psi$ ist,

$$mr\pi = mn\psi$$

sein muß. Da ψ nur unendlich klein, sonst aber unbestimmt ist; so leuchtet ein, daß diese Größe immer als ein aliquoter Theil irgend eines Bogens, wie AD, angesehen, und daß mithin eine jede Zahl, wie die durch (OD) dargestellte, durch fortgesetzte Potenziirung von $(-)^r 1 = e^{n\psi\sqrt{-1}}$ erzeugt werden kann. Es muß hierbei immer nach $m$maliger Potenziirung $mr\pi = mn\psi$ sein, und daher allgemein in der Gleichung

$$(-)^s 1 = e^{n\varphi\sqrt{-1}},$$

worin $s = mr$ und $\varphi = m\psi$ ist,

$$s\pi = n\varphi \text{ oder}$$
$$\varphi = \frac{s}{n}\pi.$$

Hieraus folgt, daß wenn der Richtungskoeffizient einer Linie durch $(-)^s$ dargestellt wird, $s\pi$, wie bekannt, den Bogen AD des Neigungswinkels dieser Linie gegen die positive Axe in einem Kreise bezeichnet, dessen Halbmesser gleich der Längeneinheit ist: wenn jener Richtungskoeffizient aber in der Form $a^{\varphi\sqrt{-1}}$ oder $e^{n\varphi\sqrt{-1}}$ gegeben wird, was nach dem Vorstehenden offenbar geschehen kann; so sieht man, daß die Größe φ den $n$ten Theil jenes Bogens AD bezeichnet. Da n der natürliche Logarithmus von a ist, also $= 1$ werden würde, wenn man statt der Wurzel a die Wurzel e angenommen hätte; so leuchtet ein, daß wenn man diese Annahme wirklich macht, in dem Ausdrucke

$$(-)^s = e^{\varphi\sqrt{-1}},$$

durch welchen auf eine doppelte Weise der Richtungskoeffizient irgend einer Größe dargestellt werden kann,

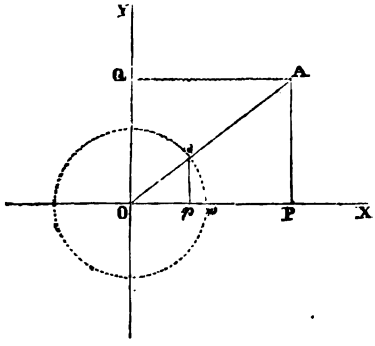
$$s\pi = \varphi = \text{arc. DOX}$$

ist.

Unter der letzteren Voraussetzung reduzirt sich nun auch die obige Reihenentwickelung von $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ auf

$$\left.\begin{aligned} e^{\varphi\sqrt{-1}} &= 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.} \\ &+ \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}\right)\sqrt{-1} \end{aligned}\right\} \ldots.(11)$$

$e^{\varphi\sqrt{-1}}$ oder $(-)^{\varphi} 1$ stellt nach dem Obigen irgend einen Radius $(O\alpha)$ des mit der Längeneinheit $O\omega$ als Halbmesser beschriebenen Kreises dar. Denkt man sich von α auf die reelle Axe ein Perpendikal αp gefällt; so ist der erste Theil auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung der Ausdruck für die Linie (Op) und der zweite der Ausdruck für das Perpendikel (αp), dessen absolute Länge gleich dem Faktor von $\sqrt{-1}$ ist. Nennt man daher, analog der trigonometrischen Bezeichnung, die Linie Op den Kosinus des Winkels $\alpha O\omega$ oder des Bogens $\omega\alpha = \varphi$, und die Linie αp den Sinus desselben Winkels oder Bogens, setzt also



$$Op = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.} = \cos\varphi \quad \ldots.(12)$$

und

$$\alpha p = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.} = \sin\varphi; \ldots.(13)$$

so erhält man für den allgemeinen Ausdruck des Richtungskoeffizienten die drei Formen

$$(-)^{\varphi} = e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin.\varphi\sqrt{-1}, \qquad \ldots.(14)$$

und demnach für die allgemeinste Form irgend einer positiven, negativen, imaginären oder partiell imaginären Zahl

$$(-)\, b = b\, e^{\varphi\sqrt{-1}} = b(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}) \qquad \ldots.(15)$$

Hierin bezeichnet b die Quantität der Zahl oder die absolute Länge der dadurch dargestellten Linie und $s\pi = \varphi$ den Bogen des Neigungswinkels dieser Linie gegen die positive Axe in einem Kreise, dessen Halbmesser gleich der Längeneinheit ist. Außerdem leuchtet ein, daß in dem Ausdrucke $b(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}) = b\cos\varphi + b\sin\varphi.\sqrt{-1}$ das erste Glied $b\cos\varphi$ den Abstand OP eines von A auf die reelle Axe gefällten Perpendikels AP vom Nullpunkte und das zweite Glied $b\sin\varphi.\sqrt{-1}$ dieses Perpendikel selbst darstellt.

Wenn man unter φ keine absolute, sondern nur eine reelle, d. h. entweder eine positive oder negative Zahl verstehen will, ebenso, wie man dem Exponenten s des Richtungskoeffizienten $(-)^s$ bald einen positiven, bald einen negativen Werth beilegte; so stellen offenbar die Potenzen von der Form

$$(-)^{-s} b = e^{-\varphi\sqrt{-1}} = b[\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi).\sqrt{-1}] \quad \ldots\ldots (16)$$

Vektorradien dar, welche durch eine Drehung aus der positiven Lage nach der der früher angenommenen entgegengesetzten Seite, also durch eine Drehung in der Richtung AF (s. die Fig. auf Seite 97) entstanden gedacht werden müssen.

§. 46. Beziehungen, welche zwischen den Sinus und Kosinus Ein und desselben und verschiedener Winkel stattfinden.

Aus den obigen Reihen für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ folgt unmittelbar durch eine Substitution von $-\varphi$ für φ

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi \text{ und } \sin(-\varphi) = -\sin\varphi; \quad \ldots\ldots (17)$$

demnach allgemein

$$e^{\pm\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi \pm \sin\varphi.\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (18).$$

Hieraus ergibt sich

$$e^{\varphi\sqrt{-1}}.e^{-\varphi\sqrt{-1}} = (\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1}),$$

d. i. wenn man die Multiplikationen auf beiden Seiten ausführt, und beachtet, daß $e^{\varphi\sqrt{-1}-\varphi\sqrt{-1}} = e^0 = 1$ ist,

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \quad \ldots\ldots (19)$$

Diese Gleichung gibt die Abhängigkeit an, in welcher der Sinus und Kosinus eines Winkels zu einander stehen.

Ferner hat man

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} \cdot e^{\pm\psi\sqrt{-1}} = (\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \sqrt{-1})(\cos\psi \pm \sin\psi \cdot \sqrt{-1})$$

$$= \cos\varphi\cos\psi \mp \sin\varphi\sin\psi + (\sin\varphi\cos\psi \pm \sin\psi\cos\varphi)\sqrt{-1};$$

es ist aber auch

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} \cdot e^{\pm\psi\sqrt{-1}} = e^{(\varphi\pm\psi)\sqrt{-1}} = \cos(\varphi \pm \psi) + \sin(\varphi \pm \psi) \cdot \sqrt{-1}.$$

Da die letzten beiden Ausdrücke einander gleich sein müssen, und Dies offenbar nur dann möglich ist, wenn die reellen und die imaginären Theile derselben resp. einander gleich sind; so erhält man die Beziehungen

$$\cos(\varphi \pm \psi) = \cos\varphi\cos\psi \mp \sin\varphi\sin\psi \quad \ldots\ldots (20)$$

$$\sin(\varphi \pm \psi) = \sin\varphi\cos\psi \pm \sin\psi\cos\varphi \quad \ldots\ldots (21).$$

Durch diese beiden Formeln ist man im Stande, den Kosinus und Sinus der Summe oder Differenz zweier Winkel durch die Kosinus und Sinus dieser Winkel selbst zu bestimmen.

Da

$$(e^{\pm\varphi\sqrt{-1}})^n = (\cos\varphi \pm \sin\varphi \cdot \sqrt{-1})^n$$

und auch

$$(e^{\pm\varphi\sqrt{-1}})^n = e^{\pm n\varphi\sqrt{-1}} = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi \cdot \sqrt{-1}$$

ist; so folgt die Beziehung

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi \cdot \sqrt{-1}, \quad \ldots\ldots (22)$$

worin die Moivresche Formel besteht.

Entwickelt man die linke Seite der vorstehenden Gleichung nach dem binomischen Lehrsatze (§. 23) in eine Reihe, und setzt darauf die reellen Glieder derselben gleich $\cos n\varphi$ und die imaginären gleich $\sin n\varphi \cdot \sqrt{-1}$; so erhält man

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\varphi \cdot \sin^2\varphi +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\varphi \cdot \sin^4\varphi - \text{etc.} \quad \ldots\ldots (23)$$

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi.\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\varphi.\sin^3\varphi + \text{etc.}\ldots.(24)$$

Durch dieſe Formeln wird der Koſinus oder Sinus des $n$fachen eines Winkels durch verſchiedene Potenzen des Koſinus und Sinus des Winkels ſelbſt dargeſtellt. Will man umgekehrt die Potenz des Koſinus oder Sinus eines Winkels durch die Koſinus und Sinus der ſukzeſſiven Vielfachen dieſes Winkels ausdrücken; ſo ſetze man mit Navier

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1} &= x,\\ \cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1} &= y,\end{aligned}\right\} \text{alſo} \quad \begin{aligned}2\cos\varphi &= x+y,\\ 2\sin\varphi.\sqrt{-1} &= x-y.\end{aligned}$$

Entwickelt man jetzt für den Fall, daß n eine ganze poſitive Zahl ſei, nach dem binomiſchen Lehrſatze die $n$te Potenz von $x+y$; ſo kommt

$$(2\cos\varphi)^n = x^n + n x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 + \ldots + y^n.$$

Da nun $xy = (\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})(\cos\varphi - \sin.\varphi\sqrt{-1}) = 1$ iſt; ſo hat man auch

$$(2\cos\varphi)^n = x^n + n x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-4} + \ldots + y^n.$$

Nach der Moivreſchen Formel (22) iſt allgemein

$$x^n = (\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi.\sqrt{-1};$$

ſubſtituirt man hierin für n nach und nach die Werthe n, $n-2$, $n-4$ etc. und führt die für x^n, x^{n-2}, x^{n-4} etc. ſich ergebenden Ausdrücke in die vorhergehende Gleichung ein; ſo erhält man

$$(2\cos\varphi)^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi + \ldots + \cos n\varphi$$
$$+\left(\sin n\varphi + n\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)\varphi + \ldots - \sin n\varphi\right)\sqrt{-1}.$$

Die Glieder der erſten Reihe auf der rechten Seite dieſer Gleichung ſind paarweiſe einander gleich, mit Ausnahme des Falles, wo n eine paare Zahl iſt; die Glieder der zweiten Reihe

heben sich aber immer paarweise gegeneinander auf. Hiernach hat man

1) wenn n paar ist,

$$(2\cos\varphi)^n = 2\left[\cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots\frac{n}{2}}{1.2\ldots(\frac{n}{2}-1)}\cos 2\varphi\right] + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(\frac{n}{2}+1)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}} \quad \ldots(25)$$

2) wenn n unpaar ist,

$$(2\cos\varphi)^n = 2\left[\cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi + \ldots\ldots \frac{n(n-1)\ldots\frac{n-3}{2}}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\cos\varphi\right] \quad \ldots\ldots(26)$$

Erhebt man in ähnlicher Weise den Werth von $x-y$ zur $n$ten Potenz; so erhält man

$$(2\sin\varphi.\sqrt{-1})^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 - \ldots \pm y^n,$$

oder weil $xy=1$ ist,

$$(2\sin\varphi.\sqrt{-1})^n = x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-4} - \ldots \pm y^n.$$

Das Zeichen + oder − findet statt, jenachdem n paar oder unpaar ist. Setzt man nun für x^n den Ausdruck $\cos n\varphi + \sin n\varphi.\sqrt{-1}$; so kommt

$$(2\sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi - n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi - \ldots \pm \cos n\varphi$$
$$+\left(\sin n\varphi - n\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)\varphi - \ldots \mp \sin n\varphi\right)\sqrt{-1}.$$

1) Ist nun n paar; so wird die zweite Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung gleich null, und man hat, wenn man $(\sqrt{-1})^n = (-1)^{\frac{n}{2}}$ setzt,

$$(-)^{\frac{n}{2}}(2\sin\varphi)^n = 2\left[\cos n\varphi - n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots\frac{n}{2}}{1.2\ldots(\frac{n}{2}-1)}\cos 2\varphi\right] \mp \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(\frac{n}{2}+1)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}} \quad \ldots(27)$$

In dieser Gleichung finden die oberen oder die unteren Zeichen statt, jenachdem n ein Vielfaches von 4 oder von 2 ist.

2) Wenn n unpaar ist; so wird die erste Reihe der obigen Gleichung gleich null, und man hat

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin\varphi)^n = 2\Big[\sin n\varphi - n\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)\varphi - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots\frac{n-3}{2}}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\sin\varphi\Big] \quad \ldots.(28)$$

Auch hierin finden die oberen oder die unteren Zeichen statt, jenachdem n ein Vielfaches von 4 oder von 2 ist.

§. 47. Werthe der Sinus und Kosinus von Bögen in den verschiedenen Quadranten. — Entwickelung der Zahl π.

Aus den beiden für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ in §. 45 Gleichung (12) und (13) entwickelten Reihen folgt, wenn man darin $\varphi = 0$ setzt,

$$\cos 0 = 1, \qquad \sin 0 = 0 \qquad \ldots.(29).$$

Der Werth der Zahl π oder die Länge des Halbkreises eines mit der Längeneinheit beschriebenen Kreises, für welchen man offenbar $\cos\pi = -1$ und $\sin\pi = 0$ haben muß, während für den Quadranten $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ sein muß, läßt sich durch das folgende Verfahren leicht berechnen.

Aus der Formel

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4.5} - \text{etc.},$$

welche man durch Division der Reihe für $\sin\varphi$ mit der Größe φ erhält, geht hervor, daß wenn man den Bogen φ immer kleiner und kleiner werden läßt, sodaß sich derselbe der Gränze 0 nähert, das Verhältniß $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ der Einheit immer näher kommt oder der Werth von $\sin\varphi$ dem Werthe des Bogens φ immer mehr und mehr

gleich zu werden ſtrebt. Unter der ausdrücklichen Bedingung, daß ψ unendlich kleinen Bogen bezeichne, kann man alſo

$$\psi = \sin\psi,$$

oder wenn n eine unendlich große Zahl bezeichnet,

$$\frac{\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{n}$$

ſetzen. Multiplizirt man dieſe Gleichung mit einer beliebigen Zahl m, und ſetzt auch den Bruch $\frac{\pi}{n} = \frac{m\pi}{mn}$; ſo kommt

$$m\pi = mn\sin\frac{m\pi}{mn},$$

oder wenn man der Kürze wegen $m\pi = \varphi$ und $\frac{1}{mn} = x$ ſetzt,

$$\varphi = \frac{1}{x}\sin x\varphi.$$

Entwickelt man jetzt die Funktion $\sin x\varphi$ nach der allgemeinen Moivreſchen Formel (22) des vorhergehenden §s in eine unendliche Reihe; ſo ergibt ſich

$$\varphi = \frac{1}{x}\left\{x\cos^{x-1}\varphi.\sin\varphi - \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{x-3}\varphi.\sin^3\varphi + \text{etc.}\right\}.$$

Sondert man unter der Klammer den Faktor x ab, und beachtet, daß, wie klein auch der Werth von $x = \frac{1}{mn}$ angenommen werden möge, immer $x = x$, alſo $\frac{x}{x} = 1$ iſt; ſo kann man unter den obigen Vorausſetzungen, wo n unendlich groß, alſo $x = \frac{1}{mn}$ unendlich klein ſein muß, auch

$$\varphi = \cos^{x-1}\varphi.\sin\varphi - \frac{(x-1)\,(x-2)}{2\,.\,3}\cos^{x-3}\varphi.\sin^3\varphi + \text{etc.}$$

ſetzen.

Führt man hierauf die obige Bedingung, unter welcher die vorſtehende Gleichung nur Gültigkeit hat, ein, indem man $n = \infty$,

also $\frac{1}{mn} = x = 0$ setzt; so ergibt sich für jeden Werth des Bogens φ die Beziehung

$$\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \tfrac{1}{3}\frac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi} + \tfrac{1}{5}\frac{\sin^5\varphi}{\cos^5\varphi} - \tfrac{1}{7}\frac{\sin^7\varphi}{\cos^7\varphi} + \text{etc.},$$

oder auch, wenn man den Quotienten $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \text{tang}\,\varphi$ setzt,

$$\varphi = \text{tang}\,\varphi - \tfrac{1}{3}\text{tang}^3\varphi + \tfrac{1}{5}\text{tang}^5\varphi - \tfrac{1}{7}\text{tang}^7\varphi + \text{etc.} \ldots\ldots (30)$$

Führt man hierin für φ wiederum den Werth $m\pi$ ein; so kann man auch schreiben

$$m\pi = \text{tang}\,m\pi - \tfrac{1}{3}\text{tang}^3 m\pi + \tfrac{1}{5}\text{tang}^5 m\pi - \tfrac{1}{7}\text{tang}^7 m\pi + \text{etc.} \ldots (31)$$

In dieser Formel ist es erlaubt, für m eine jede Zahl zu substituiren, nur nicht die Zahl 1, weil für diesen Fall selbst die Moivresche Formel auf die gegenwärtige Entwickelung nicht angewendet werden könnte. Die letztere gründet sich nämlich auf die Entwickelung der linken Seite der Gleichung

$$(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})^x = \cos x\varphi + \sin x\varphi . \sqrt{-1}$$

nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe, von welcher man dann die Summe der reellen Glieder $= \cos x\varphi$ und die der imaginären Glieder $= \sin x\varphi \sqrt{-1}$ setzt. Substituirt man aber hierin $\varphi = \pi$, und nimmt für x eine ganze Zahl an, was in der vorstehenden Untersuchung ebenfalls geschehen ist, indem $x = 0$ gesetzt wurde; so wird $\sin\varphi$ und $\sin x\varphi$ gleich null, und man erhält zur Bestimmung des Werthes für $\sin x\varphi$ in Potenzen des Winkels φ gar keinen Ausdruck.

Für einen jeden anderen Werth von m ist die vorstehende Reihe richtig: da dieselbe aber nur für Werthe von $\text{tang}\,m\pi \leqq 1$ konvergirt; so liefert sie auch nur für solche Werthe von $\text{tang}\,m\pi$ brauchbare Resultate. Um zu einem dieser bestimmten Resultate zu gelangen; so folgt aus Gleichung (23) des vorhergehenden §s, wenn man darin $n = 2$ setzt,

$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, d. i. nach der Beziehung (19) §. 46

$$= 1 - 2\sin^2\varphi \text{ oder } = 2\cos^2\varphi - 1.$$

Hieraus erhält man

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}} \text{ und } \cos\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}.$$

Setzt man hierin $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und beachtet, daß $\cos 2\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist; so kommt

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}; \text{ mithin } \operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Die obige Formel (31) ist also brauchbar, wenn man darin $m \leqq \frac{1}{4}$ setzt. Für $m = \frac{1}{4}$ ergibt dieselbe, da $\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = 1$ ist,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

$$= 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{\cancel{11.13}\ 13.15} + \text{etc.}\right);$$

mithin

$$\pi = 8\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{\cancel{11.13}\ 13.15} + \text{etc.}\right), \quad \ldots\ldots (32)$$

eine Reihe, deren Bildungsgesetz leicht zu übersehen ist.

Um eine noch rascher konvergirende Reihe für die Zahl π zu erhalten, kann man in der Gleichung (23) des §s 46 $n = 3$ setzen. Dies ergibt

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi . \sin^2\varphi.$$

Substituirt man hierin $\varphi = \frac{\pi}{6}$, also $3\varphi = \frac{\pi}{2}$, und beachtet, daß $\cos 3\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist; so erhält man

$$0 = \cos^3\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{\pi}{6} . \sin^2\frac{\pi}{6}$$

$$= \cos\frac{\pi}{6}\left(\cos^2\frac{\pi}{6} - 3\sin^2\frac{\pi}{6}\right),$$

und da offenbar $\cos\frac{\pi}{6}$ nicht $= 0$ sein kann,

$$0 = \cos^2 \frac{\pi}{6} - 3\sin^2 \frac{\pi}{6}.$$

Löst man diese Gleichung Ein Mal für $\sin \frac{\pi}{6}$ und Ein Mal für $\cos \frac{\pi}{6}$ auf, indem man resp. $\cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{6}$ oder $\sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{6}$ setzt; so erhält man

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ und } \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{3}{2}}; \text{ also}$$

$$\operatorname{tang} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Führt man demnach in der obigen Formel (31) für m den Werth $\frac{1}{6}$ ein; so ergibt sich unter Berücksichtigung des vorstehenden Ausdruckes für $\operatorname{tang} \frac{\pi}{6}$ nach gehöriger Reduktion

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \text{etc.}\right),$$

oder wenn man je zwei Glieder dieser Reihe zusammenfaßt, und gehörig reduzirt,

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{8.1}{3.1.3} + \frac{8.2}{3^3.5.7} + \frac{8.3}{3^5.9.11} + \frac{8.4}{3^7.13.15} + \text{etc.}\right),$$

oder auch

$$\pi = \frac{16}{3\sqrt{3}} \left(1 + \frac{2}{3.5.7} + \frac{3}{3^3.9.11} + \frac{4}{3^5.13.15} + \frac{5}{3^7.17.19} + \text{etc.}\right) \quad (33)$$

eine Formel, deren Bildungsgesetz ebenfalls in die Augen springt.

Wenn man die Rechnung nach Einer dieser Formeln ausführt; so erhält man

$$\pi = 3{,}1415926 \ldots \quad \ldots . \quad (34) \text{ *)}$$

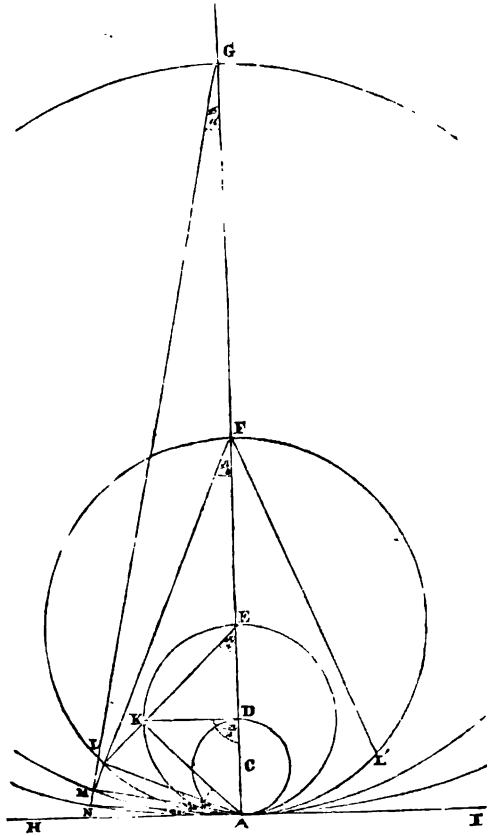
---

*) Beiläufig bemerke ich, daß wenn es verlangt würde, den Werth der Zahl π oder die Länge des Halbkreises geometrisch zu konstruiren, eine sehr bequeme Näherungsmethode sich durch folgende Betrachtung ergibt.

Nachdem man auf dieſe Weiſe den numeriſchen Werth der Größe π oder des Halbkreiſes, gemeſſen durch den Halbmeſſer als Einheit, kennen gelernt hat, für welche man

$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \sin\frac{\pi}{2}=1 \quad \text{und} \quad \cos\pi=-1,\ \sin\pi=0$$

Der mit dem Halbmeſſer CA = r um C beſchriebene Kreis ſei irgend ein gegebener, deſſen Umfang durch die Länge 2p einer geraden Linie dargeſtellt werden ſoll.



Da ſich die Umfänge zweier verſchiedener Kreiſe, wie deren Halbmeſſer verhalten; ſo leuchtet ein, daß der Umfang eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer FA = mr iſt, gleich 2mp ſein wird, und hieraus folgt, daß ein Bogen LAL' dieſes letzteren Kreiſes, deſſen Zentrumswinkel $LFL'=\frac{2\pi}{m}$ iſt und deſſen Länge dem-

hat; so ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (20) und (21) des §s. 46 für die Werthe von $\cos(\varphi \pm \psi)$ und $\sin(\varphi \pm \psi)$ leicht die folgende Reihe von Beziehungen, in welchen i irgend

---

nach den $m$ten Theil des ganzen Umfanges $2mp$ dieses Kreises beträgt, die Länge $2p$ des Umfanges des gegebenen Kreises haben wird. Ebenso wird die Hälfte von LAL′ oder der Bogen AL gleich der Länge des Halbkreises von AD oder gleich p sein.

Zieht man daher durch den Mittelpunkt C die unbestimmte gerade Linie AG, nimmt auf derselben die Punkte D, E, F, G etc. so, daß $DA = 2r$, $EA = 4r$, $FA = 8r$, $GA = 16r$ etc. ist, beschreibt aus denselben resp. mit den Halbmessern $2r$, $4r$, $8r$, $16r$ etc. Kreise und macht in diesen Kreisen die Zentrumswinkel $ADK = \frac{\pi}{2}$, $AEL = \frac{\pi}{4}$, $AFM = \frac{\pi}{8}$, $AGN = \frac{\pi}{16}$ etc.; so wird die Länge eines jeden der Bögen AK, AL, AM, AN etc. der Länge p des Halbkreises von AD gleich sein.

Je größer nun aber die Halbmesser GA dieser Kreise werden, desto mehr nähern sich die Bögen AN einer geraden Linie, deren Länge dem Halbkreise p des gegebenen Kreises gleich ist. Streng genommen, wird dieses Zusammenfallen der Bögen AN mit ihren Sehnen erst bei unendlicher Vergrößerung des Halbmessers GA stattfinden; näherungsweise kann man jedoch die Sehnen

$$AD,\ AK,\ AL,\ AM,\ AN,\ \ldots,$$

von denen eine jede folgende einem größeren Grade von Genauigkeit entspricht, für die Länge des Halbkreises der gegebenen Peripherie annehmen.

Die Konstruktion dieser Sehnen AN mit Hülfe der immer größer werdenden Kreise GA würde eine sehr unbequeme Operation sein. Die folgenden Bemerkungen führen jedoch zu einem sehr einfachen Verfahren.

Nach der Konstruktion ist der Zentrumswinkel AFM in irgend Einem jener Kreise gleich der Hälfte des Zentrumswinkels AEL in dem unmittelbar vorhergehenden Kreise, oder es ist

$$\angle\ AFM = \tfrac{1}{2} \angle\ AEL,$$

außerdem ist der Durchmesser

$$FA = 2EA \quad \text{oder} \quad FE = EA.$$

Zieht man nun von dem Punkte L des um E beschriebenen Kreises nach dem Mittelpunkte des nächstfolgenden Kreises die Linie LF; so ist, weil $\triangle FEL$ gleichschenklig,

$$\angle\ AFL = \tfrac{1}{2} \angle\ AEL.$$

Hieraus folgt, daß $\angle\ AFM = AFL$, oder daß die Sehne FL des um E beschriebenen Kreises mit dem Halbmesser FM des um F beschriebenen Kreises zusammenfällt.

Da nun der Winkel ALF in einem Halbkreise liegt; so ist er $= \frac{\pi}{2}$, und ebenso ist sein Nebenwinkel $ALM = \frac{\pi}{2}$, und wenn man in A auf AG das Perpendikel AH errichtet; so folgt, daß

$$\angle\ HAL = AFL \text{ sei.}$$

Was hier eben von dem Winkel ALM und den beiden Winkeln HAL

eine eine poſitive oder negative ganze Zahl, die 0 mit eingeſchloſſen, und φ jeden beliebigen Bogen bezeichnet,

$$\left.\begin{array}{ll} \cos 2i\pi = \cos 0 = 1, & \sin 2i\pi = \sin 0 = 0, \\ \cos(2i+\frac{1}{2})\pi = \cos\frac{\pi}{2} = 0, & \sin(2i+\frac{1}{2})\pi = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \\ \cos(2i+1)\pi = \cos\pi = -1, & \sin(2i+1)\pi = \sin\pi = 0, \\ \cos(2i+\frac{3}{2})\pi = \cos\frac{3\pi}{2} = 0, & \sin(2i+\frac{3}{2})\pi = \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \end{array}\right\} \quad (35)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\sin\varphi, & \sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = \cos\varphi, \\ \cos(\pi+\varphi) = -\cos\varphi, & \sin(\pi+\varphi) = -\sin\varphi, \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right) = \sin\varphi, & \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right) = -\cos\varphi, \\ \cos(2\pi+\varphi) = \cos\varphi, & \sin(2\pi+\varphi) = \sin\varphi, \end{array}\right\} \quad \ldots(36)$$

---

und AFL nachgewieſen iſt, gilt für alle ähnlichen Winkel der obigen Konſtruktion, und man ſieht leicht ein, daß wenn man die Linien DK, KL, LM, MN . . . zieht,

$$\angle\ ADK = AKL = ALM = AMN = \text{etc.} = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\angle\ HAK = AEK = \frac{\pi}{4},$$

$$\angle\ HAL = AFL = \frac{\pi}{8},$$

$$\angle\ HAM = AGL = \frac{\pi}{16},$$

etc.

iſt.

Um demnach ſukzeſſive die Linien AK, AL, AM, AN etc. zu konſtruiren, ziehe man die Linien AK, AL, AM, AN etc., welche reſp. die Winkel HAD, HAK, HAL, HAM, etc. halbiren, von unbeſtimmter Länge. Errichtet man hierauf in D auf AD das Perpendikel DK, welches die AK in K ſchneidet, alsdann in K auf AK das Perpendikel KL, welches die AL in L ſchneidet, dann in L auf AL das Perpendikel LM, welches die AM in M ſchneidet, und ſofort; ſo erhält man nachundnach die geſuchten Punkte K, L, M, N etc., und die Sehnen AK, AL, AM, AN etc., deren Längen der Länge p des Halbkreiſes des gegebenen Kreisumfanges AD immer näher kommen werden.

Man ſieht, daß man ſich durch dieſes einfache Verfahren ſehr raſch einer Gränze nähert, welche, ſtreng genommen, erſt nach unendlicher Vervielfältigung der vorſtehenden Konſtruktion als eine in der Richtung AH ausgeſtreckte Länge vollkommen erreicht werden würde.

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi, & \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi, \\ \cos(\pi-\varphi)=-\cos\varphi, & \sin(\pi-\varphi)=\sin\varphi, \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)=-\sin\varphi, & \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)=-\cos\varphi, \\ \cos(2\pi-\varphi)=\cos\varphi, & \sin(2\pi-\varphi)=-\sin\varphi. \end{array}\right\} \ldots (37)$$

Dieſe Gleichungen (36) und (37) behalten auch dann noch Richtigkeit, wenn man überall unter dem Zeichen cos und sin auf der rechten Seite das allgemeine Glied $2i\pi$ hinzufügt.

Hieraus erkennt man, daß die poſitiven und negativen reellen, ſowie die poſitiven und negativen imaginären Zahlen aus der allgemeinen Form

$$(-)^s b = b e^{\varphi\sqrt{-1}} = b(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}),$$

worin $s\pi=\varphi$ iſt, durch folgende Subſtitutionen erhalten werden:

1) die poſitiven reellen Zahlen für $s=0$ oder $\varphi=0$:

$$(-)^0 b = b e^0 = b(\cos 0 + \sin 0 . \sqrt{-1}) = +b, \ldots (38)$$

2) die poſitiven imaginären Zahlen für $s=\frac{1}{2}$ oder $\varphi=\frac{\pi}{2}$:

$$(-)^{\frac{1}{2}} b = b e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = b\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} . \sqrt{-1}\right) = +b\sqrt{-1}, \ldots (39)$$

3) die negativen reellen Zahlen für $s=1$ oder $\varphi=\pi$:

$$(-)^1 b = b e^{\pi\sqrt{-1}} = b(\cos\pi + \sin\pi . \sqrt{-1}) = -b, \ldots (40)$$

4) die negativen imaginären Zahlen für $s=\frac{3}{2}$ oder $\varphi=\frac{3\pi}{2}$:

$$(-)^{\frac{3}{2}} b = b e^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}} = b\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} . \sqrt{-1}\right) = -b\sqrt{-1}. \ldots (41)$$

§. 47a. Werthe der Sinus und Kosinus von imaginären Zahlen.

In §. 44 hat man gesehen, daß wenn man in dem Ausdrucke

$$e^{(-)^m \varphi},$$

in welchem der Exponent m im Richtungskoeffizienten $(-)^m$ irgend eine konstante Zahl bezeichnet, die Größe φ allmählig variiren läßt, man nachundnach die verschiedenen Radien einer Kurve erhält, deren Vektoren entweder fortwährend wachsen oder abnehmen oder sich gleich bleiben, und welche sich in allen Punkten unter demselben Winkel gegen den zugehörigen Vektor neigt. Dieser konstante Neigungswinkel der Kurve gegen ihre Vektoren wird nach §. 45 gleich $m\pi$ sein.

Hieraus folgt, daß die fragliche Kurve ein Kreis vom Halbmesser $e^0 = 1$ sein wird, sobald man $m = \frac{1}{2}$, also $(-)^m = \sqrt{-1}$ setzt. Ebenso wird sich für $m = \frac{3}{2}$, also für $(-)^m = -\sqrt{-1}$ ein Kreis ergeben, welcher nur durch eine Drehung nach entgegengesetzter Seite entstanden gedacht werden muß. Setzt man dagegen $m = 0$, also $(-)^m = +$; so wird sich die Kurve offenbar auf eine gerade Linie reduziren, welche mit der positiven reellen Axe zusammenfällt, und welche sich vom Endpunkte der positiven Längeneinheit $e^0 = 1$ nach der positiven Richtung ins Unendliche erstreckt, nach der Richtung gegen den Nullpunkt aber sich fortwährend dem letzteren Punkte nähert, ohne denselben jemals ganz zu erreichen (s. die Reihe der reellen Potenzen von a in §. 44). Für $m = 1$ also $(-)^1 = -$ ergibt sich für die obige Kurve ebenfalls die ganze positive reelle Axe, sobald man für φ soviel positive, wie negative reelle Werthe substituiren will. Für jeden Werth von m, welcher < 2 und dabei weder 0 noch $\frac{1}{2}$, noch 1, noch $\frac{3}{2}$ ist, wird die in Rede stehende Kurve eine logarithmische Spirale sein, welche sich, vom Endpunkte der positiven Längeneinheit anfangend, in unendlichen Windungen nach beiden Seiten um den Nullpunkt herum bewegt, und einen jeden Vektor unter den Neigungswinkel $m\pi$ durchschneidet. Der Kreis, welcher für $m = \frac{1}{2}$ oder $= \frac{3}{2}$ eintritt, sowie die gerade Linie, welche sich für $m = 0$ oder $= 1$ ergibt, sind offenbar besondere Fälle der eben erwähnten Spirale.

Um die verschiedenen aus der Form $e^{(-)^m\varphi}$ sich ergebenden Spiralen zu erhalten, braucht man für φ nur beliebige absolute Zahlen zu substituiren, während man gleichzeitig die Größe m ebenfalls nur zwischen reellen Zahlen variiren läßt. Es leuchtet jedoch ein, daß man zu demselben Ziele gelangt, wenn man für m irgend eine konstante absolute Zahl substituirt, und alsdann die Größe φ nicht allein zwischen den absoluten, sondern zwischen allen reellen und imaginären Zahlen von der allgemeinen Form $(-)^n\psi$ variiren läßt, worin sowol n, wie ψ, beliebige absolute Zahlen bezeichnen. Denn sollte unter dieser Voraussetzung z. B. der obige Exponent $(-)^m\varphi$ den Werth $(-)^p\varphi$ annehmen, und zugleich in der Form $(-)^m x$ enthalten sein; so brauchte man denselben nur $= (-)^m \frac{(-)^p}{(-)^m}\psi$ $= (-)^m.[(-)^{p-m}\psi]$ zu setzen, wo dann $p-m=n$ sein würde.

Demnach kann man $m=\frac{1}{2}$ setzen, und zu dem fraglichen Zwecke in der Form $e^{(-)^{\frac{1}{2}}\varphi}$ oder $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ für φ nach und nach beliebige Zahlen sowol aus der Reihe der reellen, wie der imaginären einführen. Nach §.45 Gleichung (11) wird sich der Werth des Vektors $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ immer in der Formel

$$\left.\begin{aligned} e^{\varphi\sqrt{-1}} &= 1-\frac{\varphi^2}{1.2}+\frac{\varphi^4}{1.2.3.4}-\frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{etc.} \\ &+\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{1.2.3}+\frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5}-\frac{\varphi^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}\right)\sqrt{-1} \end{aligned}\right\}\ldots(42)$$

oder auch durch

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1} \qquad \ldots.(43)$$

darstellen, wenn man die erste Reihe der Gleichung (42) mit $\cos\varphi$ und die zweite in $\sqrt{-1}$ multiplizirte Reihe mit $\sin\varphi$ bezeichnet.

Ganz auf dieselbe Weise, wie in §. 46, findet sich auch hier, wo man für φ nicht bloß reelle, sondern alle beliebige imaginäre Werthe zu substituiren gedenkt,

$$\cos(-\varphi)=\cos\varphi \text{ und } \sin(-\varphi)=-\sin\varphi, \qquad \ldots.(44)$$

$$e^{\pm\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi\pm\sin\varphi.\sqrt{-1}, \qquad \ldots.(45)$$

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1. \qquad \ldots.(46)$$

Wenn man in die allgemeinen Formeln für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ statt φ eine rein imaginäre Größe von der Form $\varphi\sqrt{-1}$ einführt, worin φ positiv oder negativ reell ist; so findet man

$$\cos(\varphi\sqrt{-1}) = 1 + \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} + \frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.} \quad \ldots\ldots(47)$$

und

$$\sin(\varphi\sqrt{-1}) = \left(\varphi + \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}\right)\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(48)$$

Hieraus folgt, daß der Kosinus einer rein imaginären Zahl von der Form $\varphi\sqrt{-1}$ stets positiv reell, der Sinus einer solchen Zahl aber positiv oder negativ imaginär ist, jenachdem φ positiv oder negativ ist, und daß die absoluten Werthe dieser beiden Größen über jede beliebige Gränze hinaus wachsen können, was nicht möglich ist, sobald die betreffende Zahl, deren Kosinus oder Sinus gesucht wird, nur reell sein soll. Wenn man den obigen Werth von $\cos(\varphi\sqrt{-1})$ durch a und den von $\sin(\varphi\sqrt{-1})$ mit $b\sqrt{-1}$ bezeichnet; so stellt sich der Vektor (42) in diesem Falle als eine vollkommen reelle Linie in der Form

$$e^{(\varphi\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1} = a - b$$

dar, wie es auch sein muß, da

$$e^{(\varphi\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = \text{der reellen Größe } e^{-\varphi} = \frac{1}{e^{\varphi}}$$

ist. Für einen negativen Werth von φ wird

$$\cos(-\varphi\sqrt{-1}) = a \text{ und } \sin(-\varphi\sqrt{-1}) = -b\sqrt{-1},$$

also der Vektor

$$e^{(-\varphi\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = e^{\varphi} = a + (-b\sqrt{-1})\sqrt{-1} = a + b$$

werden.

Das Vorstehende ist offenbar der Fall, wo die erwähnte logarithmische Spirale mit der positiven reellen Axe zusammenfällt. Die Erstere neigt sich in ihren beiden Theilen gegen die Letztere in allen Punkten unter einem Winkel $= \pi$ oder $= 0$; für den ersteren Theil, welcher sich vom Endpunkte der positiven Längeneinheit gegen den Nullpunkt zu erstreckt, und für welchen

$$e^{-\varphi} = a - b$$

ist, entspricht der Richtungskoeffizient — oder $(-)^1$ im Exponenten dieses Vektors einem Werthe $m = 1\pi = \pi$ in der eingangs dieses Paragraphs gebrauchten Formel $e^{(-)^m \varphi}$; für den letzteren Theil, welcher sich vom Endpunkte der positiven Längeneinheit ins Unendliche erstreckt, und für welchen

$$e^{\varphi} = a + b$$

ist, entspricht der Richtungskoeffizient + oder $(-)^0$ im Exponenten dieses Vektors einem Werthe vom $m = 0\pi = 0$.

Daß der absolute Werth b des imaginären Sinus $b\sqrt{-1}$ bei der Bildung des Vektors $a + (b\sqrt{-1})\sqrt{-1} = a - b$ ebenfalls in der Richtung der reellen Axe gemessen werden muß, wie der reelle Kosinus a, stimmt mit den Begriffen vollkommen überein, welche wir oben von der Bedeutung der in den Faktor $\sqrt{-1}$ multiplizirten Größen aufgestellt haben, wenn man beachtet, daß unter einem reellen Sinus eine Linie verstanden wurde, deren Richtung auf der reellen Axe perpendikular stand; ein imaginärer Sinus muß hiernach eine Linie darstellen, welche in einer auf der Richtung der reellen Sinus perpendikular stehenden Richtung, d. i. in der Richtung der reellen Axe zu messen ist.

Da, wie leicht zu finden, ganz allgemein

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2} \qquad \ldots\ldots (49)$$

und

$$\sin\varphi = \frac{(e^{-\varphi\sqrt{-1}} - e^{\varphi\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}{2} \qquad \ldots\ldots (50)$$

ist; so erhält man für die obigen Werthe von a und $b\sqrt{-1}$ statt der Formeln (47) und (48) auch

$$\cos(\varphi\sqrt{-1}) = \frac{e^{-\varphi} + e^{\varphi}}{2} \qquad \ldots\ldots (51)$$

und

$$\sin(\varphi\sqrt{-1}) = \frac{(e^{\varphi} - e^{-\varphi})\sqrt{-1}}{2} \qquad \ldots\ldots (52)$$

Wenn man in den allgemeinen Formeln für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ statt φ eine partiell imaginäre Zahl von der Form $\varphi + \psi\sqrt{-1}$

einführt; so findet man, daß alsdann sowol der Kosinus, wie der Sinus einer solchen Zahl, eine partiell imaginäre Größe wird. Ebenso wird der Vektor $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ unter dieser Voraussetzung einen partiell imaginären Werth annehmen, und einer logarithmischen Spirale angehören, deren konstante Neigung gegen ihre einzelnen Vektoren $=\gamma$ sein wird, sobald man in der Formel

$$e^{(\varphi+\psi\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = e^{-\psi+\varphi\sqrt{-1}}$$

den Exponenten $-\psi+\varphi\sqrt{-1} = c(\cos\gamma+\sin\gamma.\sqrt{-1})$ setzt.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, daß die Formeln (20) und (21) des §s 46 für die Kosinus und Sinus der Summen und Differenzen von Zahlen auch dann noch Gültigkeit haben, wenn man für diese Zahlen Größen von der allgemeinsten Form $c(\cos\gamma+\sin\gamma.\sqrt{-1})$ substituirt.

Wenn φ und ψ dergleichen Zahlen bedeuten, welche reell, imaginär oder partiell imaginär sein können; so werden deren Kosinus und Sinus selbst reelle, imaginäre oder partiell imaginäre Größen sein. Man erkennt leicht, daß für diesen allgemeinen Fall der Schluß nicht mehr gemacht werden kann, welcher in §. 46 aus den beiden Werthen für $e^{\varphi\sqrt{-1}}.e^{\pm\psi\sqrt{-1}}$ unmittelbar zu den Gleichungen (20) und (21) führte, weil unter der jetzigen Voraussetzung sowol der erste, wie der zweite Theil eines jeden der dortigen beiden Ausdrücke für $e^{\varphi\sqrt{-1}}.e^{\pm\psi\sqrt{-1}}$ partiell imaginär ausfallen wird, und man in jenen beiden Ausdrücken nur die Summen der ganz reellen und die der ganz imaginären Glieder resp. einander gleich setzen kann, um dadurch die Gleichheit der beiden Ausdrücke selbst zu konstatiren.

Man überzeugt sich jedoch von der allgemeinen Richtigkeit der Formeln (20) und (21) des §s 46 leicht auf direktem Wege, wenn man eine Entwickelung derselben in Reihen vornimmt. Um hiernach z. B. die Formel

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi$$

darzuthun, substituire man für die einzelnen Faktoren ihre Werthe nach den Formeln (12) und (13) des §s 45. Es muß alsdann sein

$$1-\frac{(\varphi+\psi)^2}{1.2}+\frac{(\varphi+\psi)^4}{1.2.3.4}-\ldots(-1)^n\frac{(\varphi+\psi)^{2n}}{1.2\ldots2n}\ldots$$

$$=\left[1-\frac{\varphi^2}{1.2}+\ldots(-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{1.2\ldots2n}\ldots\right]\left[1-\frac{\psi^2}{1.2}+\ldots(-1)^n\frac{\psi^4}{1.2\ldots2n}\ldots\right]$$

$$-\left[\varphi-\frac{\varphi^3}{1.2.3}+\ldots(-1)^n\frac{\varphi^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}\ldots\right]$$

$$\times\left[\psi-\frac{\psi^3}{1.2.3}+\ldots(-1)^n\frac{\psi^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}\ldots\right]$$

Entwickelt man das allgemeine Glied $(-1)^n\frac{(\varphi+\psi)^{2n}}{1.2\ldots2n}$ auf der linken Seite dieser Reihe nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe; so wird ein beliebiges Glied dieser Reihe durch

$$(-1)^n\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-r+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ r}\cdot\frac{\varphi^{2n-r}\psi^r}{1.2\ldots2n},$$

oder wenn man die Faktoren in Zähler und Nenner gehörig gegeneinander aufhebt, durch

$$(-1)^n\frac{\varphi^{2n-r}\psi^r}{1.2\ldots(2n-r).1.2\ldots r}$$

dargestellt sein. Ist nun r paar $=2s$; so erhält man ein ganz gleiches Glied aus den beiden Faktoren $(-1)^{n-s}\frac{\varphi^{2n-2s}}{1.2\ldots(2n-2s)}$ und $(-1)^s\frac{\psi^{2s}}{1.2\ldots2s}$ des ersten Theiles auf der rechten Seite der obigen Gleichung. Ist r unpaar $=2s+1$; so erhält man ein gleiches Glied aus den Faktoren $(-1)^{n-s-1}\frac{\varphi^{2n-2s-1}}{1.2\ldots(2n-2s-1)}$ und $(-1)^s\frac{\psi^{2s+1}}{1.2\ldots(2s+1)}$ und aus dem Faktor -1 des zweiten Theiles auf der rechten Seite der obigen Gleichung.

Einem jeden Gliede der Entwickelung der linken Seite jener Gleichung entspricht also ein Glied der Entwickelung der rechten Seite. Umgekehrt ist ebenso leicht zu zeigen, daß sich für ein jedes Glied der Entwickelung der rechten Seite ein entsprechendes in der Entwickelung der rechten Seite findet. Hieraus folgt,

daß die beiden Seiten jener Gleichung identisch sind, oder daß für jeden Werth von φ und ψ

$$\cos(\varphi+\psi)=\cos\varphi.\cos\psi-\sin\varphi.\sin\psi \quad \ldots.(53)$$

ist.

In ähnlicher Weise kann dargethan werden, daß ganz allgemein

$$\sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi.\cos\psi+\sin\psi\cos\varphi \quad \ldots.(54)$$

ist.

Nach den vorstehenden Formeln hat man denn auch allgemein

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi \text{ und } \sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi,$$

also

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\sqrt{-1}\right)=-\sin(\varphi\sqrt{-1})=-\frac{(e^{\varphi}-e^{-\varphi})\sqrt{-1}}{2} \ldots(55)$$

und

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\sqrt{-1}\right)=\cos(\varphi\sqrt{-1})=\frac{e^{-\varphi}+e^{\varphi}}{2} \quad \ldots.(56)$$

Der Kosinus des partiell imaginären Winkels $\frac{\pi}{2}+\varphi\sqrt{-1}$ ist also rein imaginär, während sein Sinus reell ist.

Wenn man den Kosinus irgend eines Winkels mit x bezeichnet; so ist sein Sinus y immer $=\sqrt{1-x^2}$, und umgekehrt. Ist nun x reell; so kann y entweder auch nur reell oder rein imaginär sein. Ist x rein imaginär von der Form $\pm z\sqrt{-1}$; so kann y nur reell sein. Ist endlich x partiell imaginär; so muß es auch y sein. Da Dies auch von dem Kosinus gilt, wenn x der Sinus ist; so erkennt man, daß von irgend einem Winkel der Sinus und der Kosinus nicht gleichzeitig rein imaginär sein können; es sind nur die drei Fälle möglich, 1) daß beide reell, 2) daß der Eine reell und der Andere rein imaginär, 3) daß beide partiell imaginär seien.

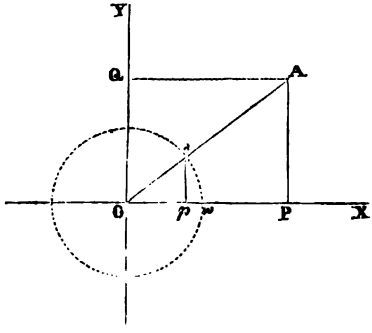
Die arithmetiſchen Operationen an den Zahlen, wenn dieſelben mit Hülfe des Richtungskoeffizienten von der Form $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$ dargeſtellt ſind.

§. 48. Allgemeine Bemerkungen und Grundſätze über dieſe Zahlformen.

Aus §. 36 und 45 geht hervor, daß eine jede Zahl unter der Form

$$(-)^m a = a e^{\varphi\sqrt{-1}} = a(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) \quad \ldots . (57)$$

begriffen iſt, worin a die Quantität der Zahl oder die abſolute Länge der dadurch dargeſtellten Linie (OA), $m\pi = \varphi$ den Bogen des Neigungswinkels AOX derſelben gegen die poſitive Axe in einem Kreiſe bezeichnet, deſſen Halbmeſſer die Längeneinheit iſt. $(-)^m 1$ oder $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$ iſt die Einheit (Oα), aus welcher jene Zahl durch fortſchreitende Bewegung in gerader Linie entſtanden iſt. Die erſten beiden Ausdrücke ergeben den Begriff von der Quantität und Richtung der durch ſie dargeſtellten Zahl oder Linie unmittelbar; der letztere ſtellt dieſe Zahl als aus zwei Theilen beſtehend dar, von denen der Eine $a\cos\varphi = (OP)$ in der Richtung der reellen Axe liegt, der andere $a\sin\varphi . \sqrt{-1} = (AP)$ aber, deſſen Länge $a\sin\varphi = AP$ iſt, in der Richtung eines in P auf der reellen Axe errichteten Perpendikels oder in der Richtung der imaginären Axe gemeſſen iſt. Die beiden Größen $a\cos\varphi$ und $a\sin\varphi$ können nach dem Obigen ſowol poſitive, wie negative Werthe annehmen und demnach reſp. ein Fortſchreiten in dem poſitiven oder negativen Theile der reellen Axe und in der poſitiven und negativen Richtung der imaginären Axe verlangen.



Wäre die Zahl in der Form

$$p + q\sqrt{-1}$$

gegeben; ſo würde man, um die abſolute Quantität a und den Neigungswinkel φ zu finden,

$$p = a\cos\varphi \text{ und } q = a\sin\varphi$$

zu ſetzen haben. Hieraus folgt, wenn man den Quotienten $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \text{tang}.\varphi$ ſetzt,

$$a = \sqrt{p^2+q^2} \text{ und } \text{tang}\,\varphi = \frac{q}{p} \quad \ldots\ldots (58).$$

Wegen Gleichung (19) §. 46 würde man auch

$$\cos\varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \text{ und } \sin\varphi = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad \ldots\ldots (59)$$

oder

$$\cos\varphi = \frac{p}{a} \text{ und } \sin\varphi = \frac{q}{a}$$

haben.

Ehe wir nun zu der Ausführung der verſchiedenen arithmetiſchen Rechnungsarten mit den vorſtehenden Zahlformen übergehen, wird es zweckmäßig ſein, einige Fundamentalſätze näher zu betrachten und nachzuweiſen.

Zwei Zahlen ſind offenbar einander gleich, wenn ſie dieſelbe Quantität und zugleich dieſelbe Richtung haben, und ſie ſind ungleich, wenn das Eine oder das andere dieſer beiden Merkmale an beiden Zahlen verſchiedene Werthe hat. Soll demnach die Gleichung

$$(-)^m a = (-)^n b$$

ſtattfinden; ſo muß nothwendig

$$(-)^m = (-)^n \text{ oder } m = n \text{ und zugleich } a = b$$

ſein. Auch folgt hieraus, daß zwei Zahlen von den Formen $p+q\sqrt{-1}$ und $r+s\sqrt{-1}$ nur dann einander gleich ſein können, wenn die reellen, ſowie die imaginären Theile, einander gleich ſind. Denn wenn

$$p+q\sqrt{-1} = r+s\sqrt{-1} \text{ ſein ſoll; ſo muß auch}$$

$$p-r = (s-q)\sqrt{-1},$$

und wenn man auf beiden Seiten quadrirt,

$$(p-r)^2 = -(s-q)^2$$

sein. $(p-r)^2$, sowie $(s-q)^2$ sind nun stets positiv, demnach $-(s-q)^2$ stets negativ; wäre also nicht gleichzeitig

$$p=r \text{ und } q=s$$

und fänden entweder gar keine, oder nur Eine dieser beiden Bedingungen statt; so müßte entweder eine positive Größe einer negativen gleich sein, oder eine positive Größe müßte $=0$ oder eine negative $=0$ sein, was Alles nach dem zuvor ausgesprochenen Prinzipe, nach welchem die Gleichheit zweier Zahlen die Gleichheit ihrer Richtungen und auch ihrer Quantitäten bedingt, unmöglich ist.

Es ist offenbar gleichgültig, ob man sich die Zahl $p+q\sqrt{-1}=a\cos\varphi+a\sin\varphi\sqrt{-1}$, welche durch die Linie (OA) dargestellt wird, in der Weise gebildet denkt, daß man erst in der reellen Axe um die Länge $OP=p=a\cos\varphi$ und dann rechtwinklig zu dieser Axe um die Länge $PA=q=a\sin\varphi$ fortschreitet, oder daß man zuvörderst in der imaginären Axe OY um die Länge $OQ=q=a\sin\varphi$ und darauf in perpendikularer Richtung zu der letzteren Axe um die Länge $QA=p=a\sin\varphi$ fortschreitet. Auf beiden Wegen muß man nothwendig in Ein und denselben Punkt A gelangen oder dieselbe durch (OA) dargestellte Zahl erhalten. Dieser Satz leuchtet ein, wenn man sich die positive Axe OX in die imaginäre OY, und umgekehrt, verlegt denkt, und die Neigungswinkel von Y nach X herum rechnet. Eine Linie, wie (OA), von der absoluten Länge $OA=a$ und dem Neigungswinkel $\omega a=\varphi$, welche bei der ersten Lage der positiven Axe durch $a\cos\varphi+a\sin.\sqrt{-1}$ dargestellt wäre, würde alsdann bei der zweiten Lage der positiven Axe durch $a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).\sqrt{-1}$ d. i. nach den Gleichungen (37) des §. 47 durch $a\sin\varphi+a\cos\varphi.\sqrt{-1}$ dargestellt sein. Wollte man nun bei der Erzeugung der Linie (OA) immer zuvörderst in der reellen Axe um den absoluten Werth des reellen Gliedes und alsdann in perpendikularer Richtung um den absoluten Werth des imaginären Gliedes fortschreiten; so würde dieses Verfahren nach Anleitung des Ausdruckes

$$(OA)=a\cos\varphi+a\sin\varphi.\sqrt{-1},$$

welcher sich auf die Lage der positiven Richtung in OX gründet,

mit der ersten der beiden vorhin bezeichneten Methoden übereinstimmen, und nach Anleitung des Ausdruckes

$$(OA)=a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).\sqrt{-1}=a\sin\varphi+a\cos\varphi.\sqrt{-1},$$

welcher sich auf die Lage der positiven Richtung in OY gründet, würde jenes Verfahren mit der zweiten Methode vollkommen übereinstimmen.

Alle Größen, welche denselben Richtungskoeffizienten $(-)^m=e^{\varphi\sqrt{-1}}=\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}$, und mithin denselben Neigungswinkel $m\pi=\varphi$ gegen die positive Axe besitzen, liegen offenbar in Ein und derselben durch den Nullpunkt gehenden geraden Linie. Man kann sich dieselben aus der Einheit $(-)^m 1=(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})1$, deren Quantität der Quantität der positiven Einheit gleich, und deren Richtung durch den obigen Koeffizienten bestimmt ist, gerade so gebildet denken, wie die positiven Größen aus der positiven Einheit hervorgegangen sind.

Irgend eine Größe kann nur auf eine einzige Weise in der Form $p+q\sqrt{-1}$ gegeben werde. Denn könnte dieselbe auch den Werth $p_1+q_1\sqrt{-1}$ annehmen; so müßte

$$p+q\sqrt{-1}=p_1+q_1\sqrt{-1}$$

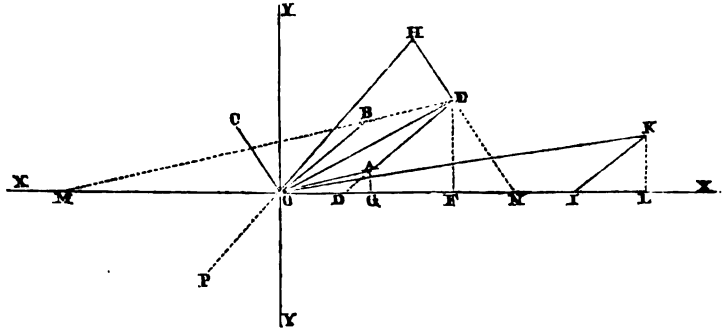
sein, was nach dem Obigen nur möglich ist, wenn $p_1=p$ und $q_1=q$ ist.

Alle Größen, welche in der Form $p+q\sqrt{-1}$ gegeben sind, stellen, wenn sie sämmtlich das reelle Glied p gemein haben, die verschiedenen Vektorradien Ein und desselben auf der reellen Axe im Abstande p vom Nullpunkte errichteten Perpendikels dar, und wenn sie das imaginäre Glied $q\sqrt{-1}$ gemein haben; so bezeichnen sie die verschiedenen Vektorradien Ein und desselben Perpendikels, welches auf der imaginären Axe im Abstande q vom Nullpunkte errichtet ist. Denn stellte z. B. der Ausdruck $p+q\sqrt{-1}$ auch irgend einen Vektor eines Perpendikels dar, welches im Abstande p_1 vom Nullpunkte auf der reellen Axe errichtet ist; so würde sich derselbe Vektor offenbar auch durch den Ausdruck $p_1+q_1\sqrt{-1}$ bestimmen lassen, was nach dem Vorhergehenden unmöglich ist, wenn p und p_1, sowie q und q_1 nicht resp. einander gleich sind.

§. 49. Addition und Subtraktion.

Um zwei Zahlen (OA) und (OB), deren Quantitäten resp. a und b und deren Neigungswinkel $AOX = \alpha$ und $BOX = \beta$ sind, zu addiren, soll man nach §. 38 von dem Endpunkte A der Einen um die Quantität und in der Richtung der andren Zahl, also um die Länge b und in einer Richtung DAE, welche mit der positiven Axe den Winkel $EDX = BOX = \beta$ einschließt, weiterschreiten. Die Summe dieser beiden Zahlen ist

$$(OA) + (OB) = (OA) + (AE) = (OE).$$



Wenn die beiden Zahlen in den Formen $a\cos\alpha + a\sin\alpha . \sqrt{-1}$ und $b\cos\beta + b\sin\beta . \sqrt{-1}$ gegeben sind; so entspricht die Summe (OE) vollkommen dem arithmetischen Ausdrucke, welchen man durch Addition der reellen und der imaginären Theile dieser beiden Ausdrücke erhält, also der Größe

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + (a\sin\alpha + b\sin\beta)\sqrt{-1},$$

und wenn OF der Fortschritt auf der reellen Axe OX und FE die Länge des in F auf OX errichteten Perpendikels ist, welches in den Punkt E führt; so hat man

$$OF = a\cos\alpha + b\cos\beta \text{ und}$$
$$FE = a\sin\alpha + b\sin\beta.$$

Jenachdem hierin OF und FE positiv oder negativ ausfallen, hat man dieselben resp. in der Richtung OX und OX′ und in der Richtung OY oder OY′ zu messen.

Um die Übereinstimmung dieſer arithmetiſchen Summe mit der geometriſchen Konſtruktion zu zeigen; ſo erkennt man zuvörderſt, daß durch die Form $a\cos\alpha + a\sin\alpha.\sqrt{-1}$ ſchon eine jede Größe, wie (OA), als die Summe zweier anderen, $a\cos\alpha = (OG)$ und $a\sin\alpha.\sqrt{-1} = (GA)$ gegeben iſt, welche in zwei verſchiedenen, auf einander rechtwinklig ſtehenden Richtungen liegen, und daß man die Größe (OA) vermittelſt des obigen Verfahrens durch einen Fortſchritt vom Endpunkte G der Einen in der Richtung GA der andren erhält.

Zwei Größen $a(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})$ und $b(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1},)$ welche denſelben Richtungskoeffizienten beſitzen, liefern ferner bei ihrer Addition das arithmetiſche Reſultat

$$(a+b)(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1}) = (a+b)\cos\alpha + (a+b)\sin\alpha.\sqrt{-1},$$

welches wiederum denſelben Richtungskoeffizienten beſitzt, alſo mit den Summanden in derſelben geraden Linie liegt, und daher einem Fortſchritte vom Endpunkte des Einen in der Richtung des anderen um die Quantität des letzteren entſpricht. Außerdem beſtätigt dieſes Reſultat in der Form

$$(a+b)\cos\alpha + (a+b)\sin\alpha.\sqrt{-1} = a\cos\alpha + b\cos\alpha + (a\sin\alpha + b\sin\alpha)\sqrt{-1}$$

das obige Prinzip der Addition der reellen und imaginären Theile der Summanden.

Soll jetzt eine Größe, deren Richtung nicht mit der der reellen Axe zuſammenfällt, zu einer poſitiven oder negativen reellen Größe addirt werden; ſo würde man die erſtere Größe unter dem ihr entſprechenden Neigungswinkel gegen die poſitive Axe an den Endpunkt der letztern zu tragen haben. So würde man die Linie $(OA) = a(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})$ zur poſitiven Linie $(OJ) = a_1$ addiren, indem man von J aus unter dem Winkel $KJX = AOX = \alpha$ um die Länge $JK = a$ fortſchritte. Die Summe (OK) würde ſowol nach dieſer Regel, wie auch bei arithmetiſcher Addition der einzelnen Theile der gegebenen Größen das Reſultat

$$a_1 + a(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1}) = (a_1 + a\cos\alpha) + a\sin\alpha.\sqrt{-1}$$

ergeben. Man kann ſich hierbei auch den Nullpunkt zuvörderſt in J liegend denken; alsdann werden alle in der Rich-

§.

§. 49. Z

zwei Zahlen
und deren
addiren, so
n die Quant
die Länge b
iven Are den
en. Die Sum

$(OA)+(O$

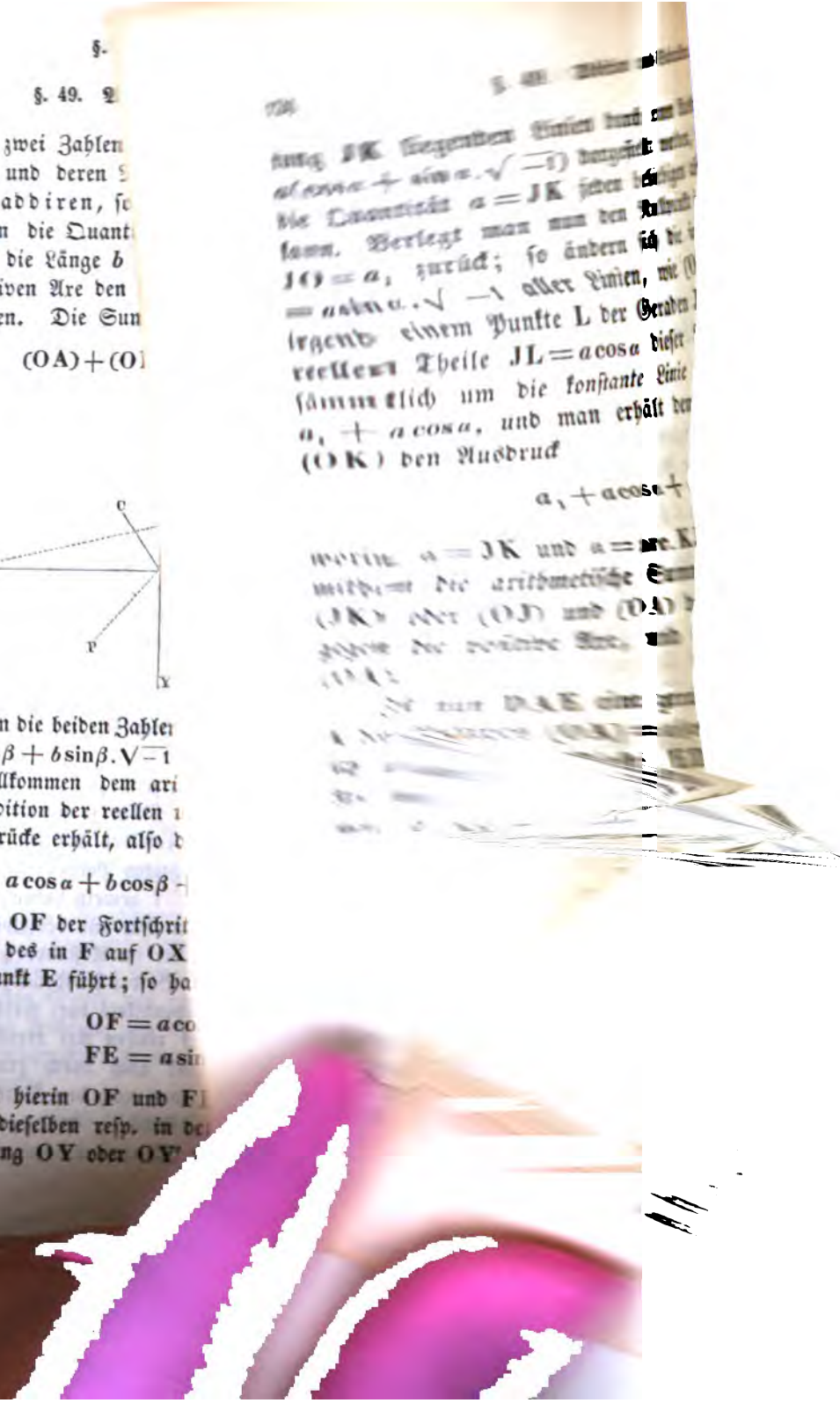
n die beiden Zahle
$\beta + b\sin\beta . \sqrt{-1}$
llkommen dem ari
dition der reellen
rücke erhält, also

$a\cos\alpha + b\cos\beta$ -

OF der Fortschrit
des in F auf OX
nkt E führt; so ha

$OF = a\cos$
$FE = a\sin$

hierin OF und F
dieselben resp. in de
ng OY oder OY'



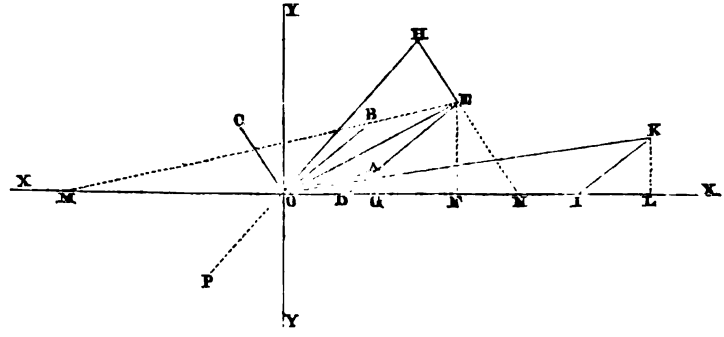
tung JK liegenden Linien durch einen Ausdruck von der Form $a(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})$ dargestellt werden, in welchem man für die Quantität $a = JK$ jeden beliebigen absoluten Werth setzen kann. Verlegt man nun den Nullpunkt in der reellen Axe um $JO = a_1$ zurück; so ändern sich die imaginären Theile $(LK) = a\sin\alpha.\sqrt{-1}$ aller Linien, wie (OK), welche von O nach irgend einem Punkte L der Geraden JK gezogen sind, nicht; die reellen Theile $JL = a\cos\alpha$ dieser Linien vermehren sich aber sämmtlich um die konstante Linie $OJ = a_1$ und werden zu $a_1 + a\cos\alpha$, und man erhält demnach für irgend einen Vektor (OK) den Ausdruck

$$a_1 + a\cos\alpha + a\sin\alpha.\sqrt{-1},$$

worin $a = JK$ und $\alpha = \text{arc.}KJX$ ist. Der Vektor (OK) stellt mithin die arithmetische Summe der beiden Linien (OJ) und (JK) oder (OJ) und (OA) dar, wenn (JK) dieselbe Neigung gegen die positive Axe, und auch die absolute Länge hat, wie (OA).

Ist nun DAE eine gerade Linie, welche durch den Endpunkt A des Vektors $(OA) = a(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})$ gezogen ist, und sich unter dem Winkel $EDX = BOX = \beta$ gegen die positive Axe neigt, und ist außerdem die Länge $AE = OB = b$ genommen; so hat man nach dem vorhergehenden Satze

$$(OA) = (OD) + (DA),$$



d. i., wenn man die Länge $OD = a_1$ und $DA = b_1$ setzt,

$$a(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})=a_1+b_1(\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1}).$$

Nach demſelben Satze hat man aber auch

$$(OE)=(OD)+(DE)$$
$$=a_1+(b+b_1)(\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1}),$$

oder mit Berückſichtigung der vorhergehenden Gleichung

$$(OE)=a(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})+b(\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1})$$

Wenn man ſich nun die Linie (AE) unter dem Winkel $BOX=EDX$ an den Nullpunkt getragen denkt; ſo iſt

$$(AE)=b(\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1});$$

man hat alſo, da $a(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})=(OA)$ iſt, ſowol geometriſch, wie arithmetiſch,

$$(OE)=(OA)+(AE).$$

Bezeichnet man die Länge OE mit r und den Winkel EOX mit φ, und denkt ſich von E auf die reelle Axe ein Perpendikel EF gefällt; ſo wird

$$OF=r\cos\varphi=a\cos\alpha+b\cos\beta \text{ und}$$
$$EF=r\sin\varphi=a\sin\alpha+b\sin\beta$$

ſein.

Man wird genau zu demſelben Reſultate geführt, wenn man ſich denkt, die Linie (OA) werde zur Linie (OB) addirt, indem man von dem Endpunkte B der letzteren um die Quantität a der erſteren in einer Richtung BE fortſchritte, welche, verlängert, die reelle Axe unter dem Winkel $EMX=AOX=\alpha$ ſchneidet. Da nun durch Ein und denſelben Ausdruck von der vorliegenden Form nur eine einzige Größe dargeſtellt werden kann; ſo folgt, daß man auf dieſem zweiten Wege in denſelben Punkt E gelangen muß, wie auf dem erſten, oder daß die Reihenfolge, in welcher man die Addition zweier Summanden ausführt, auf die Snmme keinen Einfluß hat.

Denkt man ſich durch E eine dritte Linie NEH gezogen, welche die Axe OX unter dem Winkel $HNX=COX=\gamma$ ſchneidet, und deren abſolute Länge $EH=OC=c$ iſt; ſo hat man nach dem Vorſtehenden

$$(OH) = (OE) + (EH),$$

und da $(OE) = (OA) + (AE)$ ist,

$$(OH) = (OA) + (AE) + (EH)$$

$$= a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + (a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma)\sqrt{-1},$$

u. s. f. für mehrere zu addirende Größen.

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, wie man die geometrische Addition zweier Linien (OA) und $(OB) = (AE)$ wirklich zur Ausführung zu bringen habe, wenn man die Summe durch Fortschritt in gerader Linie vom Endpunkte der Einen erzeugen will, d. h. wie man im Stande sei, durch den Endpunkt A der Einen eine Linie DAE zu legen, welche die reelle Axe unter einem gegebenen Winkel $EDX = BOX = \beta$ schneidet.

Da $(OA) = a\cos\alpha + a\sin\alpha.\sqrt{-1}$ gegeben ist; so ist auch $OG = a\cos\alpha$ und $BG = a\sin\alpha$ bekannt, und der Punkt G, in welchem ein Perpendikel auf der reellen Axe zu dem Endpunkte A der Linie OA führt, als gegeben anzusehen. Bezeichnet man nun den Abstand GD des Punktes D, in welchem die Richtung DAE die reelle Axe unter dem Winkel β schneiden muß, mit x und die Länge DA mit z; so muß offenbar

$$z\cos\beta = x \text{ und } z\sin\beta = AG = a\sin\alpha$$

sein. Hieraus folgt $z = a\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, und demnach zur Bestimmung des Abstandes GD

$$x = a\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\beta}.$$

Durch diesen Abstand ist die Lage des Punktes D und mithin die Richtung DAE gegeben, in welcher man vom Endpunkte A der Linie (OA) um die Quantität $AE = b$ der Linie (OB) fortzuschreiten habe, um die Summe $(OE) = (OA) + (OB)$ zu bilden.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß irgend eine Seite, wie (OH) einer geschlossenen geradlinigen Figur OAEHO die Summe aller übrigen (OA), (AE), (EH) (der Quantität und Richtung nach) darstellt. Nimmt man nun diese Seite (OH) in entgegen-

geſetzter Richtung HO, oder nimmt man alle Seiten der Figur in den Richtungen, in welchen ein Punkt dieſelben durchlaufen würde, wenn er ſich um den ganzen Umfang der Figur bewegte; ſo folgt, daß alsdann die arithmetiſche Summe aller Seiten einer ſolchen Figur gleich null iſt. Die Richtungen dieſer Seiten werden durch die Winkel AOX, EDX, HNX, POX (der letztere überſtumpfe Winkel im dritten Quadranten) gemeſſen, welche dieſelben oder deren Verlängerungen mit der poſitiven Richtung OX einſchließen.

Die Subtraktion verlangt, daß man von dem Endpunkte des Minuend in einer dem Subtrahend direkt entgegengeſetzten Richtung um die abſolute Quantität des Letzteren fortſchreite (§. 39); hiernach iſt

$$(OE) - (OB) = (OE) - (AE) = (OA).$$

Arithmetiſch wird dieſes Reſultat offenbar durch eine Subtraktion der reellen oder imaginären Theile des Minuends und Subtrahends ausgeführt. Wenn nämlich

$(OE) = r(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})$ und $(OB) = b(\cos\beta + \sin\beta . \sqrt{-1})$ iſt;

ſo hat man

$$(OA) = (OE) - (OB) = r\cos\varphi - b\cos\beta + (r\sin\varphi - b\sin\beta)\sqrt{-1},$$

und hierin iſt

$$r\cos\varphi - b\cos\beta = OG \text{ und}$$
$$r\sin\varphi - b\sin\beta = AG.$$

§. 50. Multiplikation und Diviſion.

Nach den Regeln der Multiplikation (§. 40) wird dieſe Operation an den beiden Faktoren ausgeführt, indem man ihre Quantitäten nach den Regeln der Multiplikation abſoluter Zahlen miteinander multiplizirt, die Neigungswinkel derſelben aber addirt. Eine arithmetiſche Entwickelung des Produktes zweier in der Form

$$ae^{\alpha\sqrt{-1}} = a(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1}) \text{ und}$$
$$be^{\beta\sqrt{-1}} = b(\cos\beta + \sin\beta . \sqrt{-1})$$

gegebener Zahlen führt genau zu demſelben Reſultate, da man $ae^{\alpha\sqrt{-1}} \times be^{\beta\sqrt{-1}} = abe^{(\alpha+\beta)\sqrt{-1}} = ab[\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta).\sqrt{-1}]$ oder auch

$$a(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1}) \times b(\cos\beta + \sin\beta.\sqrt{-1})$$
$$= ab[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\sqrt{-1}],$$

d. i. nach §. 46, Gleichung (20) und (21)

$$= ab[\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)\sqrt{-1}]$$

hat.

Wenn (a), (b) und (c) drei Zahlen bezeichnen, welche ſowol ihrer Quantität, wie ihrer Richtung nach betrachtet werden; ſo iſt leicht einzuſehen, daß immer

$$[(a) + (b)](c) = (a)(c) + (b)(c)$$

ſein muß, oder daß man dasſelbe Reſultat erhält, ob man die beiden Zahlen (a) und (b) nach den obigen Regeln des §s 38 oder 49 erſt addirt und dann die Summe nach den Regeln des §s 40 oder des gegenwärtigen §s 50 multiplizirt, oder ob man erſt die Produkte $(a)(c)$ und $(b)(c)$ bildet, und alsdann deren Summe nimmt. Denn ſetzt man

$$(a) = ae^{\alpha\sqrt{-1}} = a(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1}),$$
$$(b) = be^{\beta\sqrt{-1}} = b(\cos\beta + \sin\beta.\sqrt{-1}),$$
$$(c) = ce^{\gamma\sqrt{-1}} = c(\cos\gamma + \sin\gamma.\sqrt{-1});$$

ſo iſt

$$(a) + (b) = a\cos\alpha + b\cos\beta + (a\sin\alpha + b\sin\beta)\sqrt{-1}$$

oder wenn man nach §. 48, Gl. (58) und (59)

$$r = \sqrt{(a\cos\alpha + b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha + b\sin\beta)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha-\beta)},$$

$$\cos\varphi = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha-\beta)}} = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta}{r}$$

$$\sin\varphi = \frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha-\beta)}} = \frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{r}$$

ſetzt,

$$(a)+(b)=r(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})=re^{\varphi\sqrt{-1}};$$

mithin

$$[(a)+(b)](c)=re^{\varphi\sqrt{-1}}.ce^{\gamma\sqrt{-1}}=rce^{(\varphi+\gamma)\sqrt{-1}}$$
$$=rc[\cos(\varphi+\gamma)+\sin(\varphi+\gamma).\sqrt{-1}]$$
$$=rc\cos(\varphi+\gamma)+rc\sin(\varphi+\gamma).\sqrt{-1}.$$

Ferner iſt

$$(a)(c)+(b)(c)=ae^{\alpha\sqrt{-1}}.ce^{\gamma\sqrt{-1}}+be^{\beta\sqrt{-1}}.ce^{\gamma\sqrt{-1}}$$
$$=ace^{(\alpha+\gamma)\sqrt{-1}}+bce^{(\beta+\gamma)\sqrt{-1}}=ac[\cos(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha+\gamma).\sqrt{-1}]$$
$$+bc[\cos(\beta+\gamma)+\sin(\beta+\gamma).\sqrt{-1}].$$

Entwickelt man jetzt in dem vorhergehenden Ausdrucke für $[(a)+(b)](c)$ die Werthe von $\cos(\varphi+\gamma)$ und $\sin(\varphi+\gamma)$ nach §. 46, Gleichung (20) und (21), ſubſtituirt alsdann für $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ und r die obigen Werthe in α, β, a und b; ſo findet man daß dieſer Ausdruck mit dem vorſtehenden für $(a)(c)+(b)(c)$ identiſch iſt, daß alſo durch die beiden vorhin bemerkten Methoden nur Ein und dieſelbe Zahl erzeugt werden kann.

Was ſoeben von dem Produkte einer Summe zweier Zahlen geſagt iſt, gilt offenbar auch von dem Produkte einer Differenz ſolcher Zahlen.

Bei der Diviſion werden die Quantitäten nach den Regeln der gemeinen Diviſion wirklich dividirt, und die Neigungswinkel des Dividends und Diviſors ſubtrahirt voneinander (§. 41). Die arithmetiſche Entwickelung des Quotienten

$$\frac{a(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})}{b(\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1})}=\frac{ae^{\alpha\sqrt{-1}}}{be^{\beta\sqrt{-1}}}=\frac{a}{b}e^{(\alpha-\beta)\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{a}{b}[\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta).\sqrt{-1}]$$

ſtellt offenbar dasſelbe Reſultat dar.

Da $\frac{(a)\pm(b)}{(c)}=[(a)\pm(b)].\frac{1}{(c)}$ iſt; ſo folgt auch aus dem vorhin bei der Multiplikation nachgewieſenen Satze, daß allgemein

$$\frac{(a)\pm(b)}{(c)}=\frac{(a)}{(c)}\pm\frac{(b)}{(c)}$$

ſei.

§. 51. Potenziirung und Wurzelausziehung.

Nach den aus §. 43 für die Potenziirung ſich ergebenden Regeln wird die Quantität der Wurzel in der gewöhnlichen Weiſe potenziirt, der Neigungswinkel aber mit dem Exponenten der Potenz multiplizirt. Dasſelbe Prinzip wird auch durch die arithmetiſche Entwickelung irgend einer Potenz einer Zahl von der Form $r(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$ beſtätigt, da

$$[r(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})^m=(re^{\varphi\sqrt{-1}})^m=r^m e^{m\varphi\sqrt{-1}}$$
$$=r^m(\cos m\varphi+\sin m\varphi.\sqrt{-1})$$

iſt.

Wenn die Linie $r(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$ nicht als ein beſtimmter Vektorradius in dem ſtetigen Zuge einer Spirale gegeben iſt; ſo kann man ſich denken, ihr Neigungswinkel ſei allgemein $=2i\pi+\varphi$, worin i jede poſitive oder negative ganze Zahl bezeichnet (§. 43). Subſtituirt man dieſen Werth in die vorſtehende Gleichung; ſo findet man, daß der Werth des Reſultates ungeändert bleibt, ſolange m eine ganze Zahl iſt, weil unter dieſer Vorausſetzung $\cos(2im\pi+m\varphi)=\cos m\varphi$ und auch $\sin(2im\pi+m\varphi)=\sin m\varphi$ iſt; dasſelbe unterſcheidet ſich von dem obigen nur dadurch, daß man ſich die Potenz ebenfalls, als durch mehrmalige ganze Umdrehungen um den Nullpunkt entſtanden, zu denken hat. Iſt jedoch m ein Bruch vom Nenner n, alſo $=\frac{m}{n}$; ſo gibt es, wie ſchon in §. 43 erwähnt iſt, n verſchiedene Werthe für jene Potenz, welche alsdann in der Formel

$$\{r[\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}]\}^{\frac{m}{n}}=\{r[\cos(2i\pi+\varphi)+\sin(2i\pi+\varphi).\sqrt{-1}\}^{\frac{m}{n}}$$
$$=r^{\frac{m}{n}}e^{\frac{m}{n}(2i\pi+\varphi)\sqrt{-1}}=r^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m}{n}(2i\pi+\varphi)+\sin\frac{m}{n}(2i\pi+\varphi).\sqrt{-1}\right]$$

enthalten ſind. Die Quantitäten dieſer verſchiedenen Potenzen ſind ſämmtlich einander gleich, nämlich $=r^{\frac{m}{n}}$; die Verſchiedenheit

liegt nur in den Richtungen jener Größen, und man erkennt, daß je zwei dieſer Richtungen, welche aufeinander folgen, wenn man ſukzeſſive $i=0, 1, 2, 3 \ldots (n-1)$ oder $i=0, -1, -2, -3 \ldots -(n-1)$ ſetzt, um den Winkel oder Bogen $\frac{m}{n} 2\pi$ von einander abſtehen.

Dieſe n verſchiedenen Werthe finden natürlich auch dann noch ſtatt, wenn die gegebene Zahl poſitiv oder negativ reel iſt. Für dieſen Fall würde man, wenn die Wurzel poſitiv wäre, $\varphi=0$, $\sin\varphi=0$, $\cos\varphi=1$, alſo

$$r^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{2mi\pi}{n} + \sin\frac{2mi\pi}{n}.\sqrt{-1}\right]$$

und wenn die Wurzel negativ wäre, $\varphi=\pi$, $\sin\varphi=0$, $\cos\varphi=-1$, alſo

$$(-r)^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m(2i+1)\pi}{n} + \sin\frac{m(2i+1)}{n}.\sqrt{-1}\right].$$

haben.

Bei der Wurzelausziehung iſt nichts Beſonderes zu bemerken, da dieſelbe unter der Operation der Potenziirung mit gebrochenem Exponenten mit eingeſchloſſen iſt.

§. 52. Allgemeinſter Ausdruck für den Logarithmus einer Zahl.

Da allgemein

$$r(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})=r[\cos(2i\pi+\varphi)+\sin(2i\pi+\varphi).\sqrt{-1}]=re^{(2i\pi+\varphi)\sqrt{-1}}$$

iſt; ſo folgt für den generellen Ausdruck des natürlichen Logarithmus irgend einer reellen oder imaginären Zahl

$$\log[r(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})]=\log r+(2i\pi+\varphi)\sqrt{-1}.$$

Wenn die Zahl reell und poſitiv iſt; ſo hat man $\varphi=0$, alſo

$$\log r=\log r+2i\pi\sqrt{-1}.$$

Wenn die Zahl reell und negativ iſt; ſo hat man $\varphi=\pi$, alſo

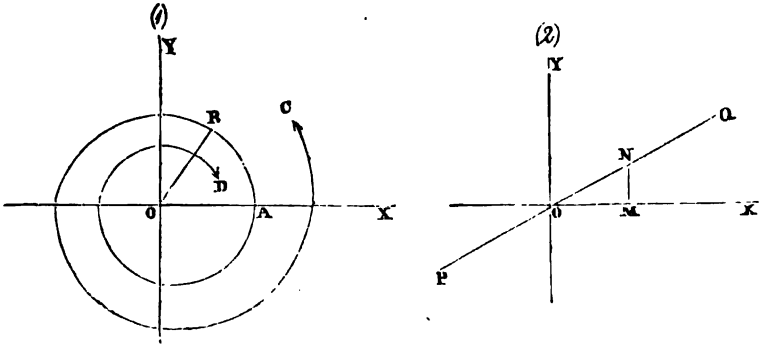
$$\log(-r) = \log r + (2i+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Aus der letzteren Gleichung, in welcher man für i jede poſitive oder negative ganze Zahl, die Null mit eingeſchloſſen, ſetzen kann, erkennt man, daß die in §. 22 erwähnten Logarithmen der negativen Zahlen zu den in dem gegenwärtigen Abſchnitte betrachteten imaginären Zahlformen gehören.

Wenn die Zahl $r(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})$ durch die Linie (OB) dargeſtellt wird, ſodaß die abſolute Länge $OB = r$ und arc. $BOX = \varphi$ iſt; ſo werden die ſukzeſſiven Potenzen

$$[r(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})]^m = r^m(\cos m\varphi + \sin m\varphi.\sqrt{-1})$$

dieſer Zahl, wenn man den Exponenten m ſtetig von 0 an in poſitiver und negativer Richtung wachſen läßt, durch die aufeinander folgenden Vektorradien einer logarithmiſchen Spirale dargeſtellt, welche ſich vom Endpunkte A der poſitiven Längeneinheit OA nach zwei entgegengeſetzten Seiten ABC... und AD... um



den Nullpunkt ſchlingt. Die abſoluten Längen dieſer Vektoren wachſen, wie die gewöhnlichen Potenzen der Größe r, alſo in geometriſcher Progreſſion, während die Neigungswinkel derſelben, wie der Exponent m ſelbſt, alſo in arithmetiſcher Progreſſion zunehmen. Die Logarithmen der verſchiedenen Potenzen der abſoluten Größe r wachſen aber bekanntlich ebenfalls in arithmetiſcher Progreſſion, während die Potenzen in geometriſcher Progreſſion variiren; es findet alſo zwiſchen den Neigungswinkeln der ſukzeſſiven Vektorradien und den abſoluten Längen derſelben

eine ähnliche Beziehung ſtatt, wie zwiſchen den Logarithmen dieſer Längen und den Längen ſelbſt. Aus der allgemeinen Formel

$$\log[r(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})]^m = m\log[r(\cos\varphi+\sin\psi.\sqrt{-1})]$$
$$= m\log r + m(2i\pi+\varphi)\sqrt{-1}$$

geht Dasſelbe hervor, da für alle Potenzen von r die darin vorkommenden Größen r, φ und i (welche letztere Größe für Ein und dasſelbe Syſtem nur einen einzigen der Werthe $\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots$ annehmen darf, indem $2i\pi+\varphi$ den Bogen des Neigungswinkels BOX der Baſis (OB) darſtellt) konſtante Werthe haben, und der Faktor m allein, und zwar in arithmetiſcher Progreſſion, variirt.

Wenn man

$$m\log r = \varrho\cos\psi \text{ und } m(2i\pi+\varphi) = \varrho\sin\psi,$$
$$\text{alſo } \varrho = m\sqrt{\log^2 r + (2i\pi+\varphi)^2} \text{ und}$$
$$\operatorname{tang}\psi = \frac{2i\pi+\varphi}{\log r}$$

ſetzt; ſo nimmt der obige Logarithmus der $m$ten Potenz des Vektors (OB) die Form

$$\varrho(\cos\psi+\sin\psi.\sqrt{-1}) = \varrho e^{\psi\sqrt{-1}}$$

an, in welchem der Winkel ψ konſtant iſt, und die abſolute Quantität ϱ, wie der Exponent m, alſo in arithmetiſcher Progreſſion variirt. Hieraus geht hervor, daß die verſchiedenen Logarithmen der ſukzeſſiven Potenzen einer imaginären Zahl (OB) (Fig. 1) durch die in arithmetiſcher Progreſſion wachſenden Abſchnitte (ON) einer durch den Nullpunkt gehenden geraden Linie PQ (Fig. 2), welche ſich unter dem Winkel ψ gegen die poſitive Axe neigt, dargeſtellt werden. Jenachdem man annimmt, der Neigungswinkel der Baſis $r(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$ iſt φ, $2\pi+\varphi$, $4\pi+\varphi\ldots$, $-2\pi+\varphi$, $-4\pi+\varphi\ldots$, ändert ſich die Richtung der geraden Linie PQ.

Für den Fall, daß die Baſis poſitiv, alſo $\varphi=0$ ſei, fällt die Linie PQ, wenn man auch $i=0$ ſetzt, mit der poſitiven Axe zuſammen; nähme man aber für i irgend eine ganze Zahl an;

so würde PQ eine durch die Formel $\text{tang}\,\psi = \frac{2i\pi}{\log r}$ bestimmte Neigung gegen die positive Axe erhalten.

Nähere Begränzung der Begriffe des Unmöglichen und des Imaginären, und Nachweisung der nämlichen Beziehungen an allen übrigen denkbaren Größen der Wirklichkeit.

§. 53. Parallele zwischen den geometrischen und arithmetischen Grundbegriffen.

In den vorstehenden Paragraphen dieses Abschnittes haben wir vorzugsweise Größen betrachtet, welche die Attribute der Quantität, der Stetigkeit und der Richtung im vollkommensten Sinne an sich tragen, und haben dabei die Methoden entwickelt, welche die Arithmetik einschlägt, um diese Größen nach den vorstehenden drei Eigenschaften auf abstrakte Begriffe zu bringen. Es zeigte sich, daß die Quantität durch die absolute Zahl, das Wesen der Stetigkeit durch die unendliche Theibarkeit der zwischen je zwei Zahlen bleibenden Differenz und der Begriff der Richtung durch das algebraische Zeichen oder den Richtungskoeffizienten arithmetisch dargestellt wurde. Diese Untersuchungen umschließen hauptsächlich die stetigen Größen des nach allen Seiten hin begränzten Raumes.

Wenn die räumlichen Größen in ihrer ganzen Allgemeinheit betrachtet werden sollen; so kann keine der vorhin bemerkten drei Eigenschaften von ihrem Wesen getrennt werden, und man hat gesehen, daß sie alle drei so innig miteinander verwebt sind, daß sie sich gegenseitig bedingen, und daß keine ohne die andere vollständig gedacht werden kann. Der Begriff der Quantität und der möglichen Verschiedenheit zweier Quantitäten erfordert die Vorstellung der möglichen Entstehung oder Bildung der Einen aus der anderen, nach einem bestimmten Gesetze: solange zwischen diesen beiden Quantitäten noch ein Unterschied bleibt, muß derselbe, da er selbst Quantität hat, theilbar sein; dieser Schluß, auf beliebig kleine Theile irgend eines endlichen Unterschiedes zweier Quantitäten angewandt, führt auf den Begriff der Ste-

tigkeit oder der allmähligen Fortbildung einer Größe durch unendlich kleine Übergänge. Die regelmäßige Fortbildung der Quantitäten nach dem einfachen Gesetze der Vermehrung, wodurch sich nachundnach verschiedene Glieder Ein und derselben Reihe erzeugen, fordert unabweisbar auch die Möglichkeit des Rückwärtsschreitens von den höheren Gliedern dieser Reihe zu den niedrigern, nach einem ebenso einfachen Gesetze der Verminderung. Diese Fort- und Rückbildung von Quantitäten führt zu dem Begriffe von zwei einander direkt entgegengesetzten Richtungen, und da je zwei Größen, welche eine Vergleichung untereinander zulassen, auseinander durch irgend ein Bildungsgesetz und zwar wiederum auf eine stetige Weise durch allmählige Übergänge müssen erzeugt werden können; so setzt die Vorstellung von zwei verschiedenen Richtungen die Existenz von einer unendlichen Menge anderer voraus, welche nach einem bestimmten Prinzipe auseinander hervorgehn und den plötzlichen Sprung von der Einen Richtung auf die direkt entgegengesetzte vermitteln.

Demgemäß sehen wir, nachdem zur begriffsmäßigen Darstellung der verschiedenen Quantitätsverhältnisse die Form der absoluten Zahlen erfunden ist, durch die Operation der Addition auch die entgegengesetzte der Subtraktion entstehen. Eine allgemeine Anwendung des Gesetzes der Subtraktion führt zu dem Begriffe der entgegengesetzten oder widerstreitenden, positiven und negativen Zahlen. Das geometrische Bild dieser Zahlen sind die verschiedenen Abschnitte Ein und derselben geraden Linie, welche sich von einem gegebenen Nullpunkte aus nach zwei entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche erstreckt; die arithmetische Operation der Addition und Subtraktion wird geometrisch durch den Fortschritt eines Punktes in gerader Linie nach jenen beiden Richtungen hin vertreten.

Die negativen Zahlen werden arithmetisch durch ein bloßes Vorsetzen eines Zeichens vor die positiven oder absoluten Zahlen von den letzteren unterschieden. Dieses Zeichen vertritt die Stelle eines Faktors, und beide Zahlen werden durch einfache Multiplikation mit diesem Zeichen (oder auch mit der negativen Einheit) die Eine aus der andern erhalten. Demnach führt die unbeschränkte Anwendung der Regeln der Multiplikation auf dem Wege der Potenzirung und Wurzelausziehung zu den ima-

ginären Zahlen, welche die zwischen den positiven und negativen Zahlen liegenden Mittelglieder als Größen darstellen, welche nach den verschiedenen in Einer Ebene möglichen Richtungen gebildet sind. Das Zeichen im erweiterten Sinne, oder der Richtungskoeffizient, wird der arithmetische Maaßstab für die Richtungsverschiedenheit mehrerer gegeneinander geneigter gerader Linien und ersetzt den geometrischen Kreisbogen, welcher dort zu gleichem Behufe dient. Die Multiplikation mit dem Richtungskoeffizienten entspricht in geometrischer Bedeutung der Drehung eines Radius im Kreise um den Nullpunkt herum.

Die absolute Zahl und der Richtungskoeffizient sind also die beiden Elemente, deren sich die Arithmetik bedient, um die geometrischen Grundbegriffe der geraden Linie und des Kreises in sich aufzunehmen. Der Letztere, der Richtungskoeffizient, ist nicht mehr als ein unabhängiger, selbstständiger Begriff zu betrachten, sobald einmal das Bildungsgesetz der absoluten Zahlen behuf Darstellung aller quantitativer Größenverhältnisse angenommen ist: aus dem Obigen geht hervor, daß die unbeschränkte Anwendung dieses Gesetzes durch einfache logische Schlußfolgerungen nothwendig zuvörderst auf die beiden Begriffe der Stetigkeit, oder des Überganges durch unendlich kleine Unterschiede, und der Existenz zweier einander direkt entgegengesetzter Richtungen, alsdann aber auch auf die Richtungsverschiedenheit im Allgemeinen, namentlich auf die Idee von Richtungen führen muß, welche durch unendlich kleine Übergänge auseinander hervorgehen und zwischen den direkt entgegengesetzten Richtungen eine stetige Reihe von Zwischengliedern einschalten. Ohne die Vorstellung des stetigen Fortschreitens in einer bestimmten Richtung kann man sich auch das Wesen der Quantität nicht vollständig denken. Alles was Quantität hat, muß demnach auch das Merkmal der Stetigkeit und der möglichen Entstehung in verschiedenen Richtungen an sich tragen.

§. 54. Nähere Bezeichnung der unmöglichen und der imaginären Größen.

Nun leuchtet ein, daß man in dem stetigen Systeme aller denkbaren, sowol der Quantität, wie der Richtung nach, verschie-

denen Größen eine gewisse Klasse, deren Glieder einer besonderen Bedingung entsprechen, hervorheben, und die Beziehungen untersuchen kann, in welchen diese Größen zueinander stehen. Wenn man solche Größen von eingeschränkten Eigenschaften den Operationen irgend einer Rechnung unterwirft, um die Veränderungen zu beobachten, welche dieselben unter dem Einflusse irgend eines Gesetzes erleiden; so erwartet man, daß das Resultat wiederum eine Größe von der gedachten Cathegorie sei. Wäre Dies nicht der Fall, und erhielte man als Ergebniß der Rechnung eine Größe aus den übrigen Gliedern des obigen allgemeinen Systemes; so würde man den Schluß ziehen, daß der gestellten Forderung der Aufgabe durch eine Größe jener besonderen Klasse kein Genüge geleistet werden könne. Die Aufgabe würde also etwas Unmögliches verlangen, und man könnte die aus der Rechnung resultirende Größe selbst eine unmögliche nennen. Dabei muß man jedoch wohl unterscheiden, daß diese Unmöglichkeiten immer nur *relativ*, und niemals *absolut* sind; sie sind es nur insofern, als man verlangt, daß die Größe, welche den Forderungen der Aufgabe genügen soll, gewissen im voraus an sie gestellten Bedingungen entsprechen soll. Läßt man den Begriff der Größen ganz unbeschränkt; so gibt es immer Eine oder mehrere wirkliche Größen, welche durch das Resultat irgend einer mathematischen Rechnung unzweideutig bestimmt werden, wie man schon **a priori** zu schließen berechtigt ist, da eine derartige Rechnung bei ihren schrittweisen Operationen immer nur solche Veränderungen an den Größen bewirkt, welche den allgemeinen der Entstehung und Fortbildung aller Größen zu Grunde liegenden Prinzipien entsprechen.

Eine *absolute Unmöglichkeit* würde eine Forderung sein, die durch keine nach den Bildungsgesetzen des vorstehenden Abschnittes erzeugte Größe verifizirt werden könnte; den arithmetischen Formelausdruck, welcher sich als Endresultat aus einer solchen Forderung ergäbe, würde man mit Recht eine *unmögliche Größe* nennen. Verlangt man jedoch nur, daß die gesuchte Größe einer bestimmten Reihe des allgemeinen Größensystemes angehöre, und findet man durch die Rechnung einen Ausdruck, welcher keine Größe der bezeichneten Reihe, sondern Eine aus der übrigen Gesammtheit darstellt; so kann man zwar behaupten,

daß der Aufgabe durch keine der gegebenen Größen ein Genüge geleistet werden könne, und kann deshalb die Forderung eine bedingungsweise Unmöglichkeit nennen; das Endresultat ist übrigens keineswegs eine unmögliche Größe, da dasselbe ja Eine im Bereiche der Wirklichkeit liegende darstellt; es ist nur der Ausdruck für eine Größe, welche nicht die verlangten Eigenschaften besitzt. Bezeichnen wir daher Größen von der letzteren Art, welche durch eine im voraus gegebene Bedingung aus einer besonderen Reihe des allgemeinen Größensystemes ausgeschlossen sind, mit dem zwar nicht ganz passenden, aber doch für eine gewisse Klasse dieser Größen allgemein gebräuchlichen Namen der imaginären Größen. Reelle Größen, zum Gegensatz der imaginären, sind alsdann die, welche jener besonderen Reihe selbst angehören.

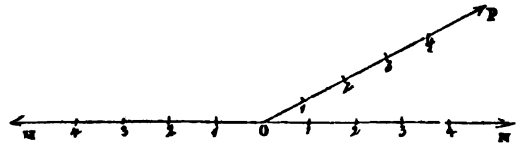
§. 55. Bestimmung der reellen und imaginären Größen des allgemeinen Größensystemes in besonderen Fällen.

1) Das Imaginäre, bedingt durch eine gewisse Beschränkung der quantitativen Verhältnisse, wie bei den diskreten Größen.

Aus der letzteren Definition geht hervor, daß der allgemeine Begriff, welchen man mit den imaginären Größen zu verbinden habe, noch nicht zu einer bestimmten Art von Größen führt, welche sich immer durch dieselben charakteristischen Kennzeichen von gewissen anderen, z. B. von den positiven Größen, unterscheiden. Die imaginären Größen geben sich erst dann zu erkennen, wenn in irgend einem besonderen Falle die reellen Größen näher bestimmt sind; alle Größen, welche nicht reell sind, sind alsdann imaginär.

Wollte man z. B. nur Untersuchungen über ganze Zahlen anstellen, und forderte, daß alle durch gewisse Operationen sich ergebenden Zahlen ganze oder genaue Vielfache der Einheit seien; so würden alle gebrochenen Zahlen, sobald sie sich als Endresultate der Rechnung darstellten, zu den imaginären gehören.

Um diesen Fall an einem Beispiele aus der physischen Welt zu erläutern; so nehme man an, ein Mensch bewege sich von einem bestimmten Nullpunkte 0 aus auf einer Straße fort, welche in gleichen Abständen mit den Nummernsteinen 1, 2, 3, 4 ꝛc. versehen ist: es wird gefragt, wie viel Stück Nummernsteine (nicht welche Straßenlänge) er am Ende irgend einer Zeit hinter sich habe. Diese Anzahl von zurückgelegten Nummern muß offenbar eine ganze Zahl sein. Es ist ein undenkbarer Begriff, daß der Mensch sollte 4½ Nummernsteine auf seiner Reise



berührt haben; in dem Augenblicke, wo er in dem Punkte 4 anlangt, hat er 4 Stück, und in dem Augenblicke, wo er in dem Punkte 5 anlangt, hat er 5 Stück Steine hinter sich. Solange er sich irgendwo zwischen den beiden Punkten 4 und 5 befindet, wird man immer nur von ihm sagen können, er habe 4 Nummernsteine hinter sich.

Wollte man nun die gesuchte Stückzahl dadurch bestimmen, daß man die von dem Menschen am Ende irgend einer Zeit zurückgelegte Länge von a Längeneinheiten durch die Länge des Abstandes irgend zweier Nummernsteine $01 = a$ Längeneinheiten dividirte; so würde der Quotient $\frac{a}{a}$ häufig gebrochene Zahlen ergeben, welche mithin den an sie gestellten Forderungen kein Genüge leisten können. Dessenungeachtet gehören die hier als imaginär zu betrachtenden gebrochenen Zahlen sehr wohl zu den wirklichen, und haben einen nicht zu verkennenden, der Aufgabe im Allgemeinen entsprechenden Sinn.

Um uns von der wahren Bedeutung solcher gebrochenen Stückzahlen Rechenschaft zu geben; so bemerken wir leicht, daß die Aufgabe im vorliegenden Falle mit anderen Worten die Forderung in sich schließt, die Entfernung des Reisenden in irgend einem Augenblicke vom Nullpunkte 0 durch die Anzahl der passirten Nummernsteine zu messen. Nun leuchtet ein, daß sich

der Reisende zu jeder Zeit in irgend einem Punkte der Straße, also auch in irgend einem Abstande vom Nullpunkte befinden wird, daß mithin das Resultat der Rechnung immer eine wirkliche Größe sein muß — ob diese Größe aber in die Reihe der ganzen Zahlen gehört, und demnach der Forderung im engeren Sinne genügen kann, ist eine andere Frage, welche sich im voraus nicht beantworten läßt. Wie das Endresultat aber auch ausfallen möge; so viel steht fest, daß dasselbe immer die Entfernung des Reisenden vom Nullpunkte darstellt.

Die Entstehung der Zahlen, welche die Mengen der zurückgelegten Nummern 1, 2, 3, 4... angeben, geschieht arithmetisch durch fortgesetzte Addition Einer Einheit nach der anderen zum Werthe null. Die geometrischen Bilder für die Werthe dieser Zahlen sind die Mengen der Nummernsteine 1, 2, 3, 4... in der obigen Figur; man erkennt jedoch, daß jene Zahlwerthe diesen Mengen nur unter der stillschweigenden Betrachtung beigemessen werden, daß die Nummernsteine in gewissen Abständen aufeinander folgen, und demzufolge nachundnach von einem Menschen berührt werden, welcher sich in der Richtung der Straße bewegt. Befindet sich derselbe bei dem Steine Nr. 4; so hat er 4 Steine oder 4α Längeneinheiten hinter sich: bei dem Steine Nr. 5 angelangt, hat er 5 Steine oder 5α Längeneinheiten zurückgelegt. Befände er sich nun aber bei dem Übergange von Nr. 4 zu Nr. 5 in einem Punkte, welcher um die Länge $= \frac{1}{4}\alpha$ von dem Steine Nr. 4 abstände; so würde er $4\alpha + \frac{1}{4}\alpha = 4\frac{1}{4}\alpha$ Längeneinheiten oder $4\frac{1}{4}$ Stationen von der Länge α zurückgelegt haben. Es ist leicht einzusehen, daß das obige imaginäre Resultat von $4\frac{1}{4}$ Stück Nummernsteinen, sowie es durch eine Messung der Entfernung $4\frac{1}{4}\alpha$ durch die Stationslänge α erhalten ist, den geometrischen Ort zwischen den beiden Nummernsteinen 4 und 5 bezeichnet, in welchem sich der Reisende momentan befindet.

Wollte man von dem Werthe der absoluten Länge ganz abstrahiren, welche zwischen irgend zwei der obigen Nummernsteine 1, 2, 3, 4... liegt, und dieselben nur nach ihrer Reihenfolge und Stückzahl betrachten, gleichviel, ob sich die Steine in gleichen oder in ganz verschiedenen Abständen voneinander befänden; so kann man immer noch nach der Stückzahl der zurückgelegten Nummernsteine fragen; nur müßte dieselbe alsdann durch ein an-

deres, als das vorhergehende Messungsverfahren bestimmt werden. Die arithmetischen Ausdrücke 1 Stein, 2 Steine, 3 Steine ꝛc. werden auch in diesem Falle geometrisch durch die stetige Bewegung eines Punktes in der Richtung ON beschrieben. In Nr. 4 angelangt, entspricht der Ort dieses Punktes der Bezeichnung von 4 zurückgelegten Nummernsteinen; in Nr. 5, der Bezeichnung von 5 dergleichen zurückgelegten Steinen. Da durch diese arithmetischen Ausdrücke zugleich der geometrische Ort bezeichnet wird, in welchem sich der fragliche Punkt in verschiedenen Zeiten befindet; so leuchtet ein, daß eine Veränderung des Ortes auch eine Veränderung des arithmetischen Ausdruckes erforderlich macht, und daß keine der Lagen, in welche der Punkt bei seiner Bewegung von Nr. 4 bis Nr. 5 kommt, sowenig durch die Bezeichnung von 4, wie durch die Bezeichnung von 5 zurückgelegten Nummernsteinen dargestellt werden kann. In der Mitte zwischen Nr. 4 und 5 angelangt, wird der Punkt so nahe an dem ersteren, wie an dem letzteren sein, und es leuchtet ein, daß dieser Ort durch das arithmetische Mittel zwischen den Zahlen 4 und 5, also durch $4\frac{1}{2}$ (Stück zurückgelegte Nummernsteine) wird dargestellt werden müssen. Überhaupt wird die gemischte Zahl $4+\frac{a}{b}$, worin $\frac{a}{b}<1$ ist, einen Ort zwischen den beiden Steinen Nr. 4 und 5 bezeichnen, welcher um $\frac{a}{b}$ des gegenseitigen Abstandes dieser beiden Nummern von der ersteren entfernt liegt.

In einer ähnlichen Weise, wie hier die Stückzahlen einer Menge von verschiedenen aufeinander folgenden Nummernsteinen aus der entsprechenden Einheit gebildet sind, entstehen alle *diskreten* Größen aus ihren als einfach und untheilbar angenommenen Theilen. Diese Theile und deren Vielfache stellen aber immer nur gewisse Glieder einer *stetigen* ins Unendliche fortlaufenden Reihe dar, deren allgemeines Bildungsgesetz sich jederzeit entweder aus dem Grundbegriffe der in Rede stehenden Größe unmittelbar, oder mittelbar aus der Art und Weise ergibt, wie man den Werth dieser Größe durch andere mißt. Bei der letzteren Bestimmungsart tritt alsdann das Wesen der als Maaß dienenden Größe an die Stelle der zu messenden Größe, wie vorhin der Begriff der Entfernung vom Nullpunkte an die Stelle

des Begriffes von einer gewissen Menge zurückgelegter Nummernsteine trat

§. 56. 2) Das Imaginäre, bedingt durch eine gewisse Beschränkung der Richtungsverhältnisse.

In dem vorhergehenden Beispiele einer diskreten Größe wurde besonders auf solche imaginäre Resultate aufmerksam gemacht, welche ihren Grund in gewissen absolut quantitativen Verhältnissen hatten, die von vorne herein aus der Gesammtheit aller reellen Größenverhältniße ausgeschloſſen waren. Es leuchtet ein, daß in diesem Falle auch alle diejenigen Werthe als imaginäre anzusehen sind, welche eine Entstehung nach einer anderen als der positiven Richtung ON, beurkunden, gleichviel, ob die Quantitäten derselben durch ganze oder gebrochene Zahlen dargestellt werden, da es z. B. beim ersten Beispiele eine nothwendige Forderung ist, daß sich der Mensch vom Punkte O aus nur in der Richtung ON, und in keiner anderen bewege. Wäre auf diese Weise die Bewegung des Letzteren nicht beschränkt; so könnte er in jeder beliebigen, durch die Richtungskoeffizienten $(-)^m$ oder $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$ bestimmten Richtung OP fortschreiten, und darin a Nummernsteine hinter sich lassen. Die Nothwendigkeit einer solchen Bewegung, um der Bedingung einer gewissen Aufgabe zu genügen, würde die Rechnung durch das Resultat $(-)^m a = a(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})$ zu erkennen geben.

Der letztere Ausdruck würde offenbar auch dann noch ein imaginärer sein, wenn es sich nicht um diskrete, sondern um vollkommen stetige Größen handelte, denen aber die Bedingung auferlegt wäre, daß sie nur in einer einzig gegebenen Richtung ON gebildet seien. Ein solcher Fall würde eintreten, wenn man nach dem Abstande vom Punkte O fragte, in welchem sich ein Körper nach einer gewissen Zeit befände, der mit einer bekannten Geschwindigkeit in der Richtung ON fortgestoßen wäre. Ein Resultat $= -a$ würde hier ebenso imaginär sein, wie ein Resultat von der allgemeinen Form $(-)^m a = a(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})$. In solchen Fällen, wo das Imaginäre durch die Bildung in gewissen Richtungen bedingt ist, hat man zur Erklärung der Endresultate nicht den Begriff zu modifiziren, welchen man mit der ab-

soluten Quantität der in Rechnung gebrachten Größen verband, sondern lediglich die Vorstellung, welche sich an die Entstehung der Quantität dieser Größen nach bestimmten Richtungen knüpfte. So würde der vorstehende Ausdruck $-a$ immer heißen, der Abstand des Körpers am Ende der gegebenen Zeit vom Punkte O betrage a Längeneinheiten; damit die Aufgabe aber möglich sei, müsse sich der Körper nicht in der Richtung ON, sondern in der direkt entgegengesetzten Richtung OM mit derselben Geschwindigkeit fortbewegen. Da das Letztere unter den gemachten Voraussetzungen nicht verwirklicht werden kann; so drückt die Formel $-a$ hier ein imaginäres Resultat aus.

Dächte man sich einen Körper, welcher sich in irgend einem Punkte des Theiles OM der unbegränzten geraden Linie MN augenblicklich in Ruhe befände, und von einem in O befindlichen Körper nach den Gesetzen der Gravitation angezogen würde, sodaß er in Folge dieser Anziehungskraft nach bekannten mechanischen Prinzipien um den Punkt O eine in der Linie MN liegende oszillirende Bewegung anzunehmen gezwungen wäre; so würden sowol positive, wie negative Werthe für den Abstand desselben vom Mittelpunkte O am Ende einer gewissen Zeit zu den reellen Ausdrücken gehören. Imaginär wären alsdann Werthe vor der Form $a(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})$, welche eine nicht mit ON oder OM zusammenfallende Richtung bezeichneten.

§. 57. Die räumlichen Beziehungen als unveräußerliches Merkmal aller übrigen Größen.

Die in den letzten beiden Paragraphen erläuterten Verhältnisse finden sich an einer jeden Kathegorie von Größen wieder, aus denen die Mathematik überhaupt Kombinationen zu bilden im Stande ist. Alle Größen, sobald sie als Elemente in eine mathematische Rechnung eintreten, tragen den Charakter der Räumlichkeit entweder unmittelbar an sich, indem sie selbst Raumgrößen sind, oder sie erlangen denselben durch die Art ihrer Entstehung im Raume oder durch Wirkungen, welche sie auf räumliche Größen hervorbringen, und welche alsdann zu Maaßeinheiten dienen, um die fraglichen Größen unter einander zu vergleichen. Aus der Gesammtheit der auf diese Weise entstan-

denen Größen hebt man zuweilen besondere Reihen wegen gewisser wichtiger Eigenschaften hervor, wie Dies in dem Beispiele des §. 55 mit den ganzen Zahlen oder Nummern und in den beiden Beispielen des §s. 56 Ein Mal mit den positiven und das andere Mal mit den positiven und negativen Abständen von einem gegebenen Punkte geschehen ist, bezeichnet die Glieder dieser Reihen wegen jener Eigenthümlichkeiten wol gar mit besonderen Namen, und indem man bei einer solchen künstlichen Isolirung den natürlichen Zusammenhang in den Hintergrund treten läßt, welcher auch diese Glieder an das allgemeine System von gleichartigen Größen knüpft, glaubt man in den so willkürlich gesonderten Größen eine eigene Gattung erschaffen zu haben, deren Gleichartigkeit einzig durch die erwähnte Eigenthümlichkeit in ihren gegenseitigen Verhältnissen bedingt sei. Wenn man jedoch auf den Akt der Entstehung dieser Größen oder auf die Bedeutung derjenigen Größen zurückgeht, durch welche jene gemessen und mithin hinsichtlich ihrer Fundamentalbedeutungen bestimmter und umfassender charakterisirt werden; so erkennt man leicht den allgemeineren Begriff, welcher dem Wesen der ersteren, aus einem stetigen Systeme gerissenen Größen zu Grunde liegt.

In dieser allgemeineren Bedeutung tragen alle Größen Ein und derselben Art, sobald sie nur fähig sind, den einfachsten Operationen der Mathematik, namentlich der Vermehrung und Verminderung, unterworfen zu werden, alle jene Beziehungen an sich, welche wir weiter oben an den räumlichen Größen kennen gelernt haben. Es kann Dies umso weniger befremden, wenn man beachtet, daß alle Größen der äußern materiellen Welt in der Weise, wie sie vor unseren Sinnen existiren, entweder körperliche Erfüllungen des absoluten Raumes selbst sind, oder durch dergleichen physische Körper gemessen werden, wie z. B. die Intensitäten der verschiedenen Kräfte. Alles Übrige, was im Raume nicht wirklich existirt, oder doch nicht unter der besonderen Bedeutung existirt, unter der wir Dasselbe zu betrachten belieben, verdankt der menschlichen Abstraktion sein Dasein. Da der Mensch aber nur im Stande ist, von Dingen der Außenwelt Abstraktionen zu bilden; so werden sich seine idealen Schöpfungen auch niemals der Grundbedingungen der Existenz im Raume,

mithin bei der Fiktion quantitativer Größen niemals des Begriffes der allmähligen oder ſtetigen Bildung in unendlich verſchiedenen Richtungen entäußern können.

Wie ſich der allgemeine Charakter der räumlichen Größen an verſchiedenen anderen durch Abſtraktion erzeugten Arten von Größen kenntlich macht, wollen wir zum Schluſſe dieſes Abſchnittes noch an einigen ſpeziellen Beiſpielen zu erläutern ſuchen.

§. 58. Beiſpiel 1.

Die Zeit iſt die Form, in welcher wir die Aufeinanderfolge von Zuſtänden im Geiſte aufnehmen. Die Idee der abſoluten Zeit iſt der des abſoluten Raumes ganz analog: wie wir verſchiedene Theile des Letzteren dazu benutzen, um die räumliche Ausdehnung phyſiſcher, den Raum erfüllender Körper zu beſtimmen; ebenſo bedienen wir uns der verſchiedenen Abſchnitte der abſoluten Zeit, um vermittelſt derſelben das Merkmal der Dauer an gewiſſen in der Zeit exiſtirenden Dingen zu meſſen. Dieſe Zeitabſchnitte ſind übrigens keine Größen, deren Werthverhältniſſe durch unmittelbare Wahrnehmung zur mathematiſchen Erkenntniß kommen können, wie Dies bei den räumlichen Größen durch direkte Vergleichung mit irgend einer gegebenen gleichartigen Größe der Fall iſt. da ſich die Zeitlichkeit nicht durch die äußeren Sinne beobachten läßt. Wenn gleich wir von dem allgemeinen Weſen der Zeit eine innere Vorſtellung beſitzen; ſo ſind uns die einzelnen Zeiträume damit noch nicht als mathematiſche Größen gegeben, wozu ſie erſt werden, nachdem ſie gemeſſen und zwar durch extenſive Größen gemeſſen ſind, an denen ſich die einfachen Operationen der Vermehrung und Verminderung nach beſtimmten, in der Natur aller quantitativen Bildungen begründeten Geſetzen anſchauen laſſen.

Um hiernach die gegenſeitigen Werthverhältniſſe der verſchiedenen Zeitabſchnitte auf eine ſichere Baſis zurückzuführen, ſind wir gezwungen, in das Gebiet des Raumes herabzuſteigen, um darin die Längen zu beobachten, welche ein mit gleichförmiger Geſchwindigkeit ſich bewegender Punkt zwiſchen dem Anfangs- und Endaugenblicke irgend eines zu beſtimmenden Zeitabſchnittes beſchreibt.

Der Begriff der Geschwindigkeit, welcher selbst erst durch den der absoluten Zeit verstanden werden kann, tritt hier behuf Erkenntniß des Bildungsgesetzes der zeitlichen Größen als integrirendes Element in derselben Weise auf, wie der von der Vorstellung des absoluten Raumes abhängige Begriff der Ortsveränderung oder Bewegung behuf vollständiger Erkenntniß der Entstehung oder Beschreibung der räumlichen Größen als unveräußerliches Postulat sich geltend machte.

Durch eine solche Messung der Zeitabschnitte vermittelst räumlicher Größen wird nun auf die Ersteren der Grundcharakter der Letzteren übertragen. Wenn wir jene den allgemeinen mathematischen Operationen unterwerfen; so sehen wir aus der Rechnung Resultate hervorgehen, welche sich zuvörderst auf die Natur des räumlichen Maaßes beziehen, und welche demnächst in der zwischen diesem Maaße und der gemessenen Zeitgröße obwaltenden Beziehung ihre Erklärung finden.

Angenommen, wir befinden uns auf dem geraden Zuge einer Eisenbahnlinie, und werden in einer bestimmten Richtung mit einer gegebenen konstanten Geschwindigkeit vorwärts getragen; es wird nach der Zeit t gefragt, in welcher wir irgend einen in der Ebene der Bahn liegenden Punkt erreichen.

Der Werth der Zeit t ist hier das Verhältniß selbst, in welchem die Länge des durchlaufenen Weges zu demjenigen Wege steht, welcher mit der gegebenen Geschwindigkeit in der Zeiteinheit beschrieben wird. Solange jener Weg und diese Geschwindigkeit nur ihrer Quantität nach betrachtet werden, wird auch der Werth der Zeit t nur eine quantitative Bedeutung haben; sobald aber der durchlaufene Weg auch hinsichtlich seiner besonderen Richtung im Raume in Erwägung gezogen wird, überträgt sich ebenfalls das Merkmal der Richtung auf den Werth der Größe t, und umgekehrt, wenn der für t gefundene Ausdruck das Prinzip der Richtung beurkundet; so ist dasselbe zunächst auf die Natur des Weges zu beziehen, welcher der Zeitgröße zum unmittelbaren Maaße diente, und in welchem die Letztere beschrieben ist.

Demnach leuchtet ein, daß hier ein positiver Werth $+t$ einen Zeitraum von der absoluten Größe von t Zeiteinheiten be-

zeichnet, in welchem ein in der Richtung der Bewegung des Zuges liegender Punkt erreicht werden wird.

Der Ausdruck $-t$ würde einen Zeitraum von t Zeiteinheiten bezeichnen, in welchem ein Punkt erreicht werden würde, der ebenfalls in der geraden Bahnlinie, aber *rückwärts* von dem Ausgangspunkte läge. Ein solcher Punkt kann bei der vorgeschriebenen Bewegung des Zuges offenbar nicht erreicht werden; das Resultat ist also in der engeren Bedeutung des §s 54 *imaginär*: man schließt jedoch aus der Beziehung, welche zwischen der Zeitgröße und der dieselbe messenden Raumgröße stattfindet, daß der fragliche Punkt in der Zeit t erreicht werden würde, wenn sich der Zug mit derselben Geschwindigkeit in einer der ursprünglichen *entgegengesetzten Richtung* in Bewegung setzte. Wenn man sich denkt, der Zug trete seine Bewegung in dem obengedachten rückwärts liegenden Punkte an; so wird er offenbar nach Verlauf der Zeit t in den ursprünglichen Nullpunkt des Raumes kommen: soll nun dieser Moment des Eintreffens im Nullpunkte des Raumes mit dem Anfangspunkte der Zeitrechnung zusammenfallen; so ist es nothwendig, daß die Bewegung des Zuges um t Zeiteinheiten *vor* der obigen Zeitrechnung begonnen habe, und man kann wegen dieser Beziehungen auch sagen, der in der Zeit $-t$ zu erreichende Punkt sei in Folge der Bewegung des Zuges *in der gegebenen Richtung* bereits *vor* der Zeit t erreicht *worden*. Die negativen Zeitgrößen entsprechen also in diesem Falle dem Begriffe von bereits *verflossenen* oder *vergangenen* Zeiträumen, während die positiven die *zukünftigen* Zeiträume darstellen.

Allgemein wird der Ausdruck $(-)^m$ oder $t(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$ einen Zeitraum bezeichnen, in welchem durch die obige Bewegung ein Punkt erreicht wird, dessen *absolute* Entfernung vom Ausgangspunkte in der Zeit t durchlaufen werden kann, der aber in einer unter dem Winkel $m\pi=\varphi$ *gegen die Bahnlinie geneigten Richtung* liegt. Dieses Resultat ist ebenfalls durch die Bedingungen der Aufgabe nicht zu realisiren, und demnach imaginär; seine Bedeutung ist jedoch die, daß man in der Zeit t in den besagten Punkt kommen würde, wenn der Zug die unter dem Winkel φ geneigte Richtung einschlüge. Bei der gegebenen

Bewegung des Zuges wird man sich am Ende der Zeit $t\cos\varphi$ im Endpunkte des von jenem Punkte auf die Bahnlinie gefällten Perpendikels befinden, und von diesem Punkte seitwärts noch um einen Abstand entfernt sein, welcher mit der gegebenen Geschwindigkeit in der Zeit $t\sin\varphi$ durchlaufen werden kann.

Wenn man sich statt des an das Schienengleis gefesselten Eisenbahnzuges einen ganz freien Körper denkt, welcher sich ungehindert nach allen Richtungen hin bewegen kann, und setzt voraus, die Bewegung dieses Körpers sei nur in so weit gegeben, daß man bloß diejenige Geschwindigkeit bestimmt, mit welcher sich derselbe in *paralleler Richtung* zu der obigen Bahn bewegt, indem man jenem Körper gestattet, *gleichzeitig* in perpendikularer Richtung zu dieser Bahn mit jeder beliebigen Geschwindigkeit fortzueilen; so leuchtet ein, daß wenn der Werth dieser Seitengeschwindigkeit passend gewählt wird, der Körper am Ende der Zeit t in einen jeden durch $t(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$ dargestellten Punkt oder in einen jeden Punkt des Perpendikels gelangen könne, welches in dem durch $t\cos\varphi$ dargestellten Punkte der Bahnlinie errichtet ist. Die *in der Richtung der Bahn* durchlaufenen Räume bilden das Maaß für die während der Bewegung des Körpers verflossene Zeit: es muß also behuf Realisirung des letzterwähnten Falles möglich sein, daß der Körper außer der Bewegung in der direkten Richtung der Bahn *in derselben Zeit*, welche zur Durchlaufung dieser Bahnstrecke erforderlich ist, noch anderweitige Bewegungen machen könne, zu deren Vollführung keine reelle Zeitgröße nothwendig ist. Bei einem ganz freien Körper kann Dies dadurch geschehen, daß derselbe in *schräger Richtung* gegen die Bahn bewegt wird; die beiden Theile des partiell imaginären Ausdruckes $t(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$ messen alsdann resp. die Zeiten, in welchen die Komponenten des wirklich durchlaufenen schrägen Weges in paralleler und perpendikularer Richtung, jede für sich, durchlaufen werden würde, wenn sich der Körper bloß in der Richtung einer einzelnen Komponente mit der ihm in dieser Richtung zukommenden Geschwindigkeit fortbewegte, und wenn dabei jedesmal der durchlaufene Raum als Maaß der reellen Zeit angesehen würde.

Dadurch, daß der Körper neben seiner Bewegung in paralleler Richtung zur Bahn mit der gegebenen konstanten Geschwin-

digkeit gleichzeitig eine Bewegung in perpendikularer Richtung zu derselben einschlägt, ändern sich die Räume nicht, welche er in gewissen Zeiten in der ersteren Richtung durchlaufen wird, wie verschieden auch die Räume sein mögen, die er in perpendikularer Richtung durcheilt. Beide sind voneinander ganz unabhängig; man kann einen jeden derselben variiren lassen, ohne den anderen zu ändern.

§. 59. Betrachtet man nun die Zeit oder die Dauer einer Erscheinung, z. B. das Lebensalter eines Menschen, d. h. die Zeit, welche seit der Geburt desselben bis zu dem gegenwärtigen Augenblicke verflossen ist, ganz in abstraktem Sinne, repräsentirt dieselbe also nicht geometrisch durch den räumlichen Weg, welchen ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit im Raume sich bewegender Körper während der fraglichen Zeit beschreibt, indem man es ganz gleichgültig läßt, ob sich überhaupt ein Körper während dieser Zeit bewege und mit welcher Geschwindigkeit er Dies thue; so leuchtet ein, daß die Werthe der positiven und negativen Zeiträume, welche vorhin durch die in derselben geraden Linie nach entgegengesetzten Richtungen beschriebenen Wege dargestellt wurde, resp. die Bedeutung der von einem gegebenen Zeitpunkte aus bereits vergangenen, und der noch in der Zukunft liegenden Zeitabschnitte, oder umgekehrt, annehmen. Wenn man also das Alter eines Menschen zu $+t$ Jahren angäbe; so würde Dies heißen, seit der Geburt desselben seien t Jahre verflossen: in einem imaginären Alter von $-t$ Jahren würde ein noch nicht geborener Mensch sein, welcher aber in t Jahren jedenfalls geboren werden würde, oder bis zu dessen Geburt von jetzt an noch t Jahre verfließen müßten. Im Augenblicke der Geburt würde das Alter dieses Menschen 0 Jahre sein.

Untersuchen wir jetzt, was es heißen würde, wenn eine Rechnung für das Alter eines Menschen das Resultat $t\sqrt{-1}$ ergäbe. Derselbe ist nicht t Jahre alt, und wird auch nicht in t Jahren geboren werden; ebensowenig befindet er sich im Augenblicke der Entstehung. Wenn ein Mensch um $t\sqrt{-1}$ Jahre älter oder jünger geworden sein soll; so kann sich sein reelles oder wirkliches Alter in keiner Weise geändert haben, da die in den Koeffizienten $\sqrt{-1}$ multiplizirten Größen in Beziehung zu den reellen Größen bei der Addition oder Subtraktion sich wie

ganz heterogene Größen verhalten, die einander sowenig vermehren, wie vermindern können: es muß also seit irgend einem Augenblicke eine gewisse Zeitgröße verflossen sein, welche auf das wahre Alter des in Rede stehenden Menschen, welches durch den zwischen dem Momente seiner Geburt und dem jetzigen Augenblicke liegenden Zeitraum, bestimmt wird, gar keinen Einfluß hatte. Da die Zeit selbst hier nur als eine absolute Quantität t betrachtet werden kann, und das Zeichen des Werthes von t einzig von der Beziehung abhängig ist, in welcher das Entrinnen der absoluten Zeit zu irgend einem Momente des Alters jenes Menschen steht; so erkennt man, daß die eben erwähnte Zeitgröße für den in Rede stehenden Menschen selbst auf keinen Fall verflossen sein kann, weil sonst sein Alter während dieser Zeit jedenfalls eine Änderung erlitten haben müßte, daß dieselbe vielmehr als ein Zeitraum angesehen werden muß, welcher gleichzeitig oder bei Lebzeiten jenes Menschen auf die Dauer irgend eines fremdartigen Ereignisses, z. B. auf die Lebenszeit eines beliebigen andern Menschen verwendet ist.

Der Werth $t\sqrt{-1}$ für das Alter eines Menschen kann offenbar nur aus den Operationen einer mathematischen Rechnung hervorgehen, in welcher gewisse absolute Zeitgrößen gegeben sind, die nach bestimmten Gesetzen verändert und alsdann unter dem Begriffe Lebensalter auf das Dasein eines bestimmten Menschen bezogen werden. Wie nothwendig nun auch zwischen diesen beiden Größen aus physischen Gründen eine Beziehung bestehen möge, in Folge deren eine Änderung der Einen unbedingt von einer Änderung der anderen begleitet ist; die Mathematik betrachtet dieselben doch unmittelbar als zwei besondere Arten von Größen, schauet eine jede in ihren einfachen Verhältnissen zu der ihr zu Grunde liegenden Einheit an, und nimmt mit derselben nach allgemeinen, die obige Beziehung ganz unbeachtet lassenden Gesetzen Veränderungen vor: beim Schlusse der Rechnung fragt es sich aber, ob irgend Eine dergestalt veränderte Größe nun noch die charakteristischen Eigenschaften beibehalten habe, welche sie als maaßgebend für die andere qualifizirten, oder ob sie unter dieser Operation vielleicht nicht gar ein Merkmal eingebüßt habe, welches eine nothwendige Bedingung ihrer eigenen Existenz war. Dieser letztere Fall kann offenbar nur dann ein-

treten, wenn die gegebene Größe nicht den Charakter eines allgemeinen stetigen Größensystemes, sondern nur den einer besonderen Reihe dieses Systemes an sich trägt, wie z. B., wenn man unter diesen Größen nur geographische Breiten, also Erstreckungen in paralleler Richtung zur Mittagslinie, verstehen wollte. Ein aus der Rechnung hervorgehendes, mit dem Faktor $\sqrt{-1}$ multiplizirtes Resultat, würde alsdann eine geographische Länge, also eine in Beziehung zu den gegebenen ganz fremdartige Größe darstellen, wiewol beide einem allgemeinen größeren Systeme der geometrischen Linien in Ein und derselben Ebene angehörten.

Mit dem Begriffe des Lebensalters eines bestimmten Menschen in Beziehung zu dem Begriffe der absoluten Zeit verhält es sich ganz ähnlich, wie mit den geographischen Breiten in Beziehung zu den räumlichen Erstreckungen im Allgemeinen. In irgend einem Augenblicke der absoluten Zeit kann ein Mensch **A** 1, 2, 3, 4... Jahr alt geworden sein, oder dieser Augenblick kann 1, 2, 3, 4... Jahr vor der Geburt jenes Menschen liegen, sodaß derselbe $-1, -2, -3, -4$... Jahr alt ist. Diese Lebensalter entsprechen resp. den nördlichen und den südlichen Breiten. In demselben Augenblicke kann aber auch irgend ein anderer Mensch **B** (gleichviel welcher) 1, 2, 3, 4... oder -1, -2, -3, -4... Jahr alt geworden sein. Das Alter des Menschen **B** ist in Beziehung zu dem des **A** eine vollkommen fremdartige Größe, welche das Lebensalter des Letzteren bei einer etwaigen Addition oder Subtraktion ganz ungeändert läßt: gleichwol ist dasselbe eine gewisse Zeitgröße, entsprechend den östlichen oder westlichen Längen in geometrischer Bedeutung, und wird, als Lebensalter des Menschen **A**, durch den arithmetischen Ausdruck $1\sqrt{-1}$, $2\sqrt{-1}$, $3\sqrt{-1}$, $4\sqrt{-1}$... oder $-1\sqrt{-1}$, $-2\sqrt{-1}$, $-3\sqrt{-1}$, $-4\sqrt{-1}$... dargestellt.

Wenn diese Auslegung richtig sein soll; so müssen zwischen allen soeben erwähnten Werthen des Lebensalters eines Menschen **A** genau dieselben allgemeinen Größenbeziehungen stattfinden, welche in dem gegenwärtigen Abschnitte als gemeinsames Band aller zu Ein und demselben Systeme gehöriger Größen angegeben sind. Wie sich also bei einer rein arithmetischen Betrachtung aus der Multiplikation der beiden abstrakten Zahlen $a\sqrt{-1}$

und $b\sqrt{-1}$ das negative Produkt $-ab$ ergibt, indem man $a\sqrt{-1}$ als Multiplikand und $b\sqrt{-1}$ als Multiplikator ansieht, und das Produkt so aus dem Ersteren bildet, wie der Letztere aus der positiven Einheit entstanden ist, und wie sich ebenfalls bei einer geometrischen Anschauung (§. 70), wo man unter $a\sqrt{-1}$ und $b\sqrt{-1}$ Linien versteht, welche gegen die positive Richtung rechtwinklig geneigt sind, dasselbe negative Produkt $-ab$ herausstellt; ebenso muß man zu dem Resultate kommen, daß wenn $a\sqrt{-1}$ und $b\sqrt{-1}$ unter der obigen Bedeutung imaginäre Werthe des Lebensalters Ein und derselben Person A, also reelle Werthe des Alters irgend einer anderen Person oder auch einer Sache B, darstellen, das Produkt aus beiden das negatige Alter $-ab$ der ersteren Person A ergibt.

Um Dies deutlicher einzusehen, so beachte man, daß der Multiplikator $b\sqrt{-1}$ aus dem Begriffe des positiven Alters der Person A hervorgegangen ist, indem man zuvörderst von der Beziehung dieser Zeitgröße auf das Dasein des A als wirkliches Lebensalters desselben ganz und gar abgegangen ist und dieselbe auf die Existenz irgend einer beliebigen anderen fremdartigen Erscheinung bezogen hat. Das Merkmal der Fremdartigkeit des Alters dieser beliebigen anderen Erscheinungen liegt nur darin, daß dasselbe bei der Addition oder Subtraktion zu reellen Werthe des Alters von A die Letzteren ungeändert läßt: da diese Erscheinungen selbst ganz willkürlich gelassen werden; so sind sie unter sich sämmtlich als gleichbedeutend anzusehen, und man kann sich daher statt ihrer, um die Begriffe besser zu fixiren, irgend eine andere bestimmte Person B denken. In gleicher Weise ist die Bedeutung (in geometrischer Beziehung die Richtung) des Multiplikands $a\sqrt{-1}$ aus der Bedeutung des positiven Alters von A durch Übertragung dieses Begriffes auf die fremdartige Person B hervorgegangen. Hieraus folgt zuvörderst, daß das Produkt $a\sqrt{-1} \times b\sqrt{-1}$ auf das Alter einer Person bezogen werden müsse, welche mit der B unter dem obigen Gesichtspunkte fremdartig ist: da nun aber unter B alle Personen oder Sachen verstanden werden, welche nicht mit A identisch sind; so kann die zuletzt erwähnte Person keine andere sein, als die erstere A selbst, und man sieht, daß das Produkt $a\sqrt{-1} \times b\sqrt{-1}$ ein gewisses Alter von A bezeichnen wird, wobei nur noch darzuthun ist, ob

dieſes Alter poſitiv oder negativ ſei. Der Multiplikater $b\sqrt{-1}$ iſt eine Größe, welche bei einer Addition zu einem reellen Alter von A das Letztere ganz ungeändert läßt; da nun die poſitiven Werthe dieſes Alters die Fähigkeit beſitzen, die reellen Werthe desſelben bei der Addition zu vergrößern; ſo hat man ſich zu denken, daß der poſitiven Einheit bei der Entſtehung des Multiplikators $b\sqrt{-1}$ aus derſelben, nachdem ſie $b$mal genommen, die vermehrende Eigenſchaft ganz und gar entzogen ſei. Auf ähnliche Weiſe iſt nun auch bereits der Multiplikand $a\sqrt{-1}$ aus der poſitiven Einheit entſtanden: ſoll dem Letzteren alſo, welcher in Beziehung zu den reellen Werthen des Alters von A den Charakter der Vermehrung ſchon gar nicht mehr beſitzt, bei der Multiplikation mit $b\sqrt{-1}$ dieſe Eigenſchaft nochmals in demſelben Maaße entzogen werden; ſo entſpricht Dies offenbar der Beilegung einer vermindernden Eigenſchaft, und es folgt, daß das Produkt $a\sqrt{-1}\times b\sqrt{-1}$ ein negatives Lebensalter der gegebenen Perſon A darſtellen wird, deſſen abſoluter Werth ab Zeiteinheiten enthält.

§. 60. Erläutern wir die obigen Begriffe noch an folgendem beſonderen Falle. Das Alter x einer gewiſſen Perſon A ſei dadurch beſtimmt, daß man ſagt, vor a Jahren war das Quadrat des Alters dieſer Perſon gleich dem damaligen Alter einer anderen Perſon, welche jetzt b Jahr alt iſt. Aus dieſer Bedingung ziehen wir den arithmetiſchen Schluß, daß das Quadrat der Differenz zwiſchen dem Lebensalter x der Perſon A und einer anderen bekannten Zeitgröße a gleich der Differenz zwiſchen den beiden gleichfalls bekannten Zeitgrößen b und a, oder daß

$$(x-a)^2=b-a$$

ſei. Hieraus folgt $x=a\pm\sqrt{b-a}$.

Setzt man $a=6$ Jahr und $b=10$ Jahr; ſo findet man $x=6\pm 2$, d. i. $=8$ oder $=4$ Jahr. Durch einen jeden dieſer Werthe von x, als Lebensalter der Perſon A gedacht, wird der vorſtehenden Bedingung ein Genüge geleiſtet.

Setzt man dagegen $a=10$ und $b=6$ Jahr; ſo ergibt ſich $x=10\pm 2\sqrt{-1}$. Durch dieſe Formel wird die Summe zweier wirklichen Zeitgrößen dargeſtellt, deren abſolute Werthe reſp.

10 und 2 Jahr sind. Die erstere reelle Größe bezeichnet das Lebensalter der Person A oder die Zeit, welche zwischen ihrer Geburt und dem jetzigen Augenblicke verflossen ist; die letztere imaginäre Größe bezeichnet die Dauer irgend einer anderen Erscheinung, z. B. das Lebensalter irgend einer zweiten Person B, welche gleichzeitig mit A gelebt hat und im jetzigen Augenblicke entweder 2 Jahr alt geworden ist, wenn man $+2\sqrt{-1}$ nimmt, oder in 2 Jahren geboren werden wird, wenn man $-2\sqrt{-1}$ nimmt. In Beziehung zu der fremden Person B selbst würde deren Alter immer eine reelle Größe sein; soll dasselbe jedoch als Alter der Person A ausgedrückt sein; so stellt die Arithmetik diese Zeitgröße als ein imaginäres Alter von A dar. Seit der Geburt von A, welche vor 10 Jahren erfolgte, muß auch noch eine Zeitgröße von 2 Jahren entronnen sein, welche nicht den Effekt hatte, das Alter von A zu vermehren oder zu vermindern, welche vielmehr auf die Existenz irgend eines anderen Dinges verwandt ist. Die Auflösung $x = 10 \pm 2\sqrt{-1}$ stellt also einen Gesammtwerth von 12 oder 8 absoluten Zeiteinheiten dar, von denen 10 dem Alter von A und ± 2 dem Alter irgend einer anderen Person B angehören. Nehmen wir von diesen 12 Zeiteinheiten nach Vorschrift der Aufgabe $a = 10$ Lebensjahre der Person A hinweg; so bleiben nur noch die ± 2 Lebensjahre von B zurück, welche unter der Bedeutung als Alter von A durch die imaginäre Zeitgröße $\pm 2\sqrt{-1}$ dargestellt werden; und man findet, daß das Quadrat dieser Größe in der That gleich der Differenz $b - a = 6 - 10 = -4$ Jahr ist, wie die Bedingung der Aufgabe es verlangte.

§. 61. Beispiel 3.

Bei irgend einer Menge von diskreten Dingen oder von stetigen Stoffen bildet der absolute Umfang oder die Masse der in Rede kommenden Größe in ihrer Beziehung zu der Masseneinheit das, was wir früher die Quantität der Größe genannt haben. Wenn man diese Mengen nur ihrer Quantität nach betrachtet; so kann ihr arithmetischer Ausdruck weder eine positive, noch eine negative, noch eine imaginäre Zahl sein, sondern wird

einfach durch eine absolute Zahl dargestellt (§. 28). Jene Gegensätze, oder das Merkmal der Richtung überhaupt wird an diesen Größen immer erst durch eine besondere Bedeutung ausgeprägt, welche man denselben beilegt, in Folge deren dieselben gewisse Wirkungen äußern oder gewissen Verrichtungen unterworfen werden, sodaß sich unter diesem weiteren Gesichtspunkte unzweideutig das Prinzip der Entstehung jener Größen oder der Ausübung einer Wirkung derselben nach bestimmten Richtungen zu erkennen gibt. Bedeutungen dieser Art müssen die Größen immer haben, sobald die an ihnen vorgehenden Veränderungen durch die arithmetischen Grundoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation ꝛc. dargestellt werden können, weil diesen Operationen das Prinzip der Fort- und Rückbildung nach gewissen Richtungen selbst zu Grunde liegt.

Nehmen wir einen speziellen Fall, und betrachten die durch beliebige Bedingungen bestimmte Anzahl von Kugeln, welche Jemand aus einer Urne, in der sich eine beliebige Menge derselben befinden, ziehen soll.

Die Anzahl der gezogenen Kugeln ist hier die absolute Quantität der in Rede stehenden Größe. Der Begriff dieser Art von Größen ist aber dadurch bestimmter ausgesprochen, daß die Kugeln aus der Urne gezogen sein sollen, wodurch dieselben zu den in der Urne enthaltenen und zu den in den Händen des Ziehers befindlichen Kugeln in eine nähere Beziehung treten, in Folge deren sie die Wirkung äußern, daß sie den Vorrath in der Urne vermindern und den in den Händen des Ziehers vermehren. Wenn die Rechnung a Kugeln ergibt; so heißt Dies nicht, es seien überhaupt a Kugeln nur vorhanden, sondern es seien a aus der Urne gezogene Kugeln vorhanden oder die fragliche Person habe a Kugeln aus der Urne entnommen.

Unter diesem Gesichtspunkte tragen die hier in Rede stehenden Größen den allgemeinen Charakter der räumlichen Größen, wie wir denselben in dem gegenwärtigen Abschnitte betrachtet haben, im ausgedehntesten Sinne des Wortes an sich, und alle unmöglichen und imaginären Resultate, welche eine mathematische Rechnung mit denselben ergeben mag, können nur darin ihren Grund haben, daß wir durch die Form der in der Urne enthaltenen Masse, durch die endliche Größe dieses Vorrathes, sowie

durch die eigens vorgeschriebene Art der Veränderung dieses Vorrathes willkürlich den allgemeinen Charakter jener Größen beschränkt oder aus dem stetigen Systeme aller gleichartigen Größen nur einzelne fragmentarische Reihen zur Operation disponibel gemacht haben.

So leuchtet zuvörderst ein, daß Niemand im Stande sein wird, mehr Kugeln aus der Urne zu ziehen, als überhaupt darin enthalten sind. Forderte aber die Rechnung, daß Dies geschehen sollte; so wäre das Resultat offenbar keine absolute Unmöglichkeit, sondern nur eine relative. Da jedenfalls zuvor eine Anzahl von Kugeln in der Urne niedergelegt sein mußte, bevor man dergleichen daraus entnehmen konnte; so hätten auch deren mehr in dieselbe gebracht sein können: alsdann wäre dem obigen Verlangen zu genügen gewesen. Selbst wenn eine gewisse Anzahl b von Kugeln mit der ausdrücklichen Bedingung gegeben wäre, daß nur gerade so viel Kugeln in der Urne vorräthig wären, und man begönne von dieser Anzahl nach bestimmten Vorschriften weiter auf die Anzahl a der zu ziehenden Kugeln zu schließen; so würde ein Resultat von der Form $a = 2b$ immer als kein analytisches Absurdum zu betrachten sein, wenn dasselbe auch nicht unter den gegebenen Umständen zu realisiren ist. Die Rechnung geht von der obigen Anzahl b immer nur wie von einer willkürlich als Basis gegebenen Größe aus; daß gerade so viel Kugeln in der Urne enthalten seien, ist ein zufälliger Umstand, den die Analysis nicht als nothwendiges Kriterium jener Größe bei ihren Operationen würdigen kann; sie betrachtet dieselbe vielmehr als einen gewissen Theil einer in der Urne enthaltenen unbeschränkten Kugelmenge, dessen Verminderung oder Vermehrung eine entsprechende Verminderung oder Vermehrung der gesammten Menge zur Folge hat. Beschränkt man diese Menge über eine gewisse Gränze; so kann man die Ausführbarkeit des Resultates der Rechnung unmöglich machen: denkt man sich jene Menge aber als unbeschränkte Größe, von der die Anzahl b ein ausgehobener Theil ist; so wird es auch möglich sein $a = 2b$ Kugeln aus der Urne zu entnehmen.

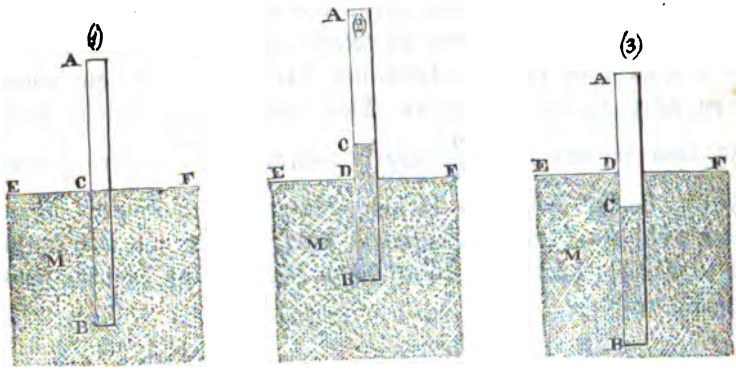
Man erkennt ferner, daß die Anzahl der gezogenen Kugeln immer eine ganze Zahl oder irgend ein Vielfaches der Einheit, d. h. eine diskrete Größe sein muß. Dieser Umstand hat aber

wiederum in einer willkürlichen Beschränkung der Quantität der einzelnen Theile der ganzen in der Urne enthaltenen Masse seinen Grund. Man fordert ausdrücklich, daß keine andere Masse, als ein genaues Vielfaches von Einer Kugel gezogen werden solle: hindert man auf eine solche Weise den freien Willen des Ziehers nicht, und bietet demselben die Masse der in der Urne enthaltenen Kugeln in ihrer vollkommenen Stetigkeit, z. B. als einen von aller Kohäsion befreieten Stoff, als eine Flüssigkeit, dar; so kann derselbe auch $\frac{a}{b}$ Kugeln ziehen, so gut wie er $\frac{a}{b}$ Kubikfuß Wasser aus einem Gefäße würde schöpfen können, wenn ihm nicht die Bedingung auferlegt wäre, immer nur mit einem Gemäße von 1 Kubikfuß Inhalt so zu schöpfen, daß dasselbe stets gefüllt wäre.

§. 62. Was endlich den Begriff betrifft, welcher bei den hier in Rede stehenden Größen an die Stelle des Begriffes der *Richtung* bei den räumlichen Größen tritt; so ist schon bemerkt, daß man es nicht bloß mit einer gewissen Anzahl von Kugeln, ihrer einfachen Quantität nach, sondern mit einer Anzahl *aus der Urne gezogener* Kugeln zu thun hat, welche, wenn sie durch das Resultat einer Rechnung gegeben werden, fordern, daß sich der Vorrath in der Urne um ebenso viel *vermindert* und der in den Händen des Ziehers befindliche um ebenso viel *vermehrt* habe. Kugeln von dieser Beschaffenheit, also wirklich *gezogene* Kugeln, sind *positive* Größen, während Kugeln im Allgemeinen, unter dem Gesichtspunkte ihrer einfachen Quantität, als *absolute* Größen erscheinen. Hieraus erhellet nun leicht, daß Kugeln von der entgegengesetzten Beschaffenheit, also solche, welche den Vorrath in der Urne *vermehren* und den des Ziehers *vermindern*, d. h. Kugeln, welche der Zieher nicht aus der Urne entnommen, sondern in dieselbe *hineingelegt* hat, als *negative* Größen auftreten werden.

Geometrisch kann der Begriff des Ziehens von Kugeln aus einer Urne folgendermaßen bildlich dargestellt werden. **EF** sei die horizontale Oberfläche irgend einer Masse **M**, unter welcher der von Kugeln erfüllte Raum einer Urne gedacht wird. **AB** ist ein vertikaler Stab, von welchem eben ein gewisser Punkt **C**

mit der horizontalen Fläche EF (Fig. 1) in Berührung ist, während sich Ein Theil CA desselben außerhalb und der andere Theil CB innerhalb der Masse M befindet. Wird dieser Stab



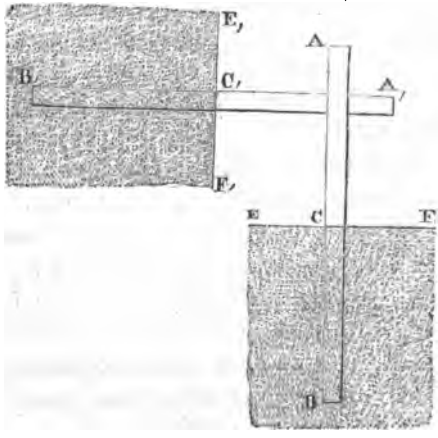
um die Höhe DC (Fig. 2) vertikal aufwärts bewegt; so wird dadurch der außerhalb der Masse befindliche Theil um die Länge DC vermehrt und der innerhalb der Masse befindliche Theil um ebenso viel vermindert. Eine solche Bewegung des Stabes entspricht dem Ziehen einer gewissen Menge positiver Kugeln aus der Urne, deren Anzahl durch die Länge DC gemessen wird. Bewegt man den Stab um die Höhe DC vertikal abwärts (Fig. 3); so wird umgekehrt der außerhalb der Masse liegende Theil um diese Länge vermindert und der innerhalb derselben liegende Theil um ebenso viel vermehrt. Die letztere Bewegung entspricht dem Hineinlegen einer gewissen Menge von Kugeln in die Urne oder dem Ziehen einer gleich großen negativen Menge von Kugeln aus derselben.

Man sieht, wie der geometrische Begriff der Bewegung eines Stabes oder einer Linie an die Stelle der Idee des Ziehens von Kugeln aus einer Urne im Allgemeinen tritt. Damit diese Bewegung aber den besonderen Charakter desjenigen Ziehens annimmt, welches von einer bestimmten Person ausgeführt wird und den Erfolg hat, daß sich dabei der in den Händen dieser Person befindliche Vorrath vermehre, während sich der Vorrath in der Urne vermindere, ist es durchaus nothwendig, daß der Stab, dessen freies Ende den Vorrath der Person und dessen

eingetauchtes Ende den Vorrath in der Urne versinnlicht, in einer bestimmten Richtung, nämlich in einer vertikalen Linie bewegt werde.

Bewegte man nun jenen Stab in einer anderen, als in einer vertikalen, und nehmen wir zuvörderst an, in einer horizontalen Richtung; so würde sich sowenig die Länge seines freien, wie die seines eingetauchten Theiles ändern. Dessenungeachtet hat aber eine Bewegung des Stabes stattgefunden, und dieselbe muß auf irgend eine Weise dem allgemeinen Begriffe des Ziehens von Kugeln aus einer Urne entsprechen. Da jene Bewegung aber durchaus nicht durch eine vertikale Höhe gemessen werden kann, welche der Punkt C beschrieben hat; so folgt, daß das zuletzt erwähnte Ziehen auch nicht von der gegebenen Person, und auch nicht aus der gegebenen Urne ausgeführt sein kann, indem der Vorrath Beider bei einer horizontalen Bewegung des Punktes C ungeändert geblieben sein wird. Durch eine solche horizontale Bewegung des Stabes AB wird demnach die Operation des Ziehens repräsentirt, welche gleichzeitig irgend eine andere, nicht in Rede stehende Person aus einer beliebigen anderen Urne vollführt hat.

Die Wirkung einer horizontalen Seitenbewegung des Stabes AB wird offenbar in ähnlicher Weise, wie vorhin, durch einen horizontalen Stab A_1B_1 gemessen, welcher in eine



vertikal abgeschnittene Masse M_1 eintaucht. Da nun nach den früheren Untersuchungen die in der Richtung A_1B_1 beschriebenen Räume in Beziehung zu den in der Richtung AB gemessenen positiven Längen als imaginäre Größen von der Form $a\sqrt{-1}$ auftreten; so folgt, daß wenn eine Rechnung das Resultat lieferte, daß die gegebene Person $a\sqrt{-1}$ Kugeln aus der Urne ziehen sollte, hierin eine Forderung zu erkennen ist, nach welcher nicht die Person A, sondern eine beliebige andere B aus irgend einer andern Urne a Kugeln zu ziehen hätte.

Ein Zug von $a+b\sqrt{-1}$ Kugeln, welcher geometrisch durch eine Bewegung des Systemes der beiden Stäbe AB und A_1B_1 in einer schrägen Richtung dargestellt wird, würde gemeinschaftlich von der gegebenen Person A und einer willkürlichen anderen B auszuführen sein. A hätte aus der Urne M a Kugeln und B hätte aus einer anderen Urne M_1 b Kugeln zu entnehmen. Der in Beziehung zur Person B reelle Zug von b Kugeln ist in Beziehung zur Person A ein imaginärer, dessen arithmetischer Ausdruck $b\sqrt{-1}$ ist.

§. 63. Um den Sinn des Vorstehenden nochmals in der Kürze zu überblicken; so erkennt man, daß aus den räumlichen Größenbeziehungen in dem vorliegenden Beispiele folgende Abstraktionen gebildet sind: Die Quantität oder absolute Länge wird durch eine gewisse Menge von Kugeln vertreten; der Begriff der Richtung ist auf den des Ziehens aus einer Urne übertragen; entgegengesetzte Richtungen charakterisiren sich in einem Herausnehmen und einem Hineinlegen. An die Stelle einer bestimmten Richtung im Raume tritt die Idee der Wirksamkeit einer bestimmten Person beim Ziehen. Im Raume gibt es unendlich viel verschiedene Richtungen, in denen absolute Längen gemessen werden können, aber nur eine einzige Klasse derselben ist von der Art, daß eine Veränderung derselben durch Längen, welche in einer als fest angenommenen Richtung liegen, durchaus nicht gemessen werden können; es sind Dies diejenigen Richtungen, welche auf der Letzteren perpendikular stehen; Längen in allen anderen Richtungen werden gemeinschaftlich durch die vorstehenden beiden gemessen. Die auf einer bestimmten Richtung perpendikular stehenden Richtungen im

Raume werden arithmetisch durch den Faktor $\sqrt{-1}$ von den reellen unterschieden (§. 32, 33 ff.). Für diese letztern Beziehungen ergeben sich in unserem Beispiele die Analogieen, daß ein wirklich vollführter Zug entweder von der gegebenen Person A *selbst*, oder von irgend einer *anderen*, oder auch *gemeinschaftlich* von A und einer anderen ausgeführt sei. Der Zug einer mit A *nicht identischen Person*, welcher ebenfalls in das allgemeine System »*gezogener Kugeln*« gehört, welcher aber auf die Wirkungen von A ganz ohne Einfluß ist, repräsentirt eine Länge in einer auf der ursprünglich angenommenen *perpendikular* stehenden Richtung, und erhält demnach, wenn er als ein Zug der Person A gedacht wird, den Richtungskoeffizienten $\sqrt{-1}$.

§. 64. Beispiel 3.

Nehmen wir zum Schlusse dieses Abschnittes noch ein Beispiel, in welchem die Quantität der zu untersuchenden Größen wiederum eine gewisse *Vielheit* von einzelnen Individuen ist, wo aber der Begriff der Richtung an diesen Individuen und demnach auch an den aus ihnen zusammengesetzten Größen dadurch ausgesprochen wird, daß die konstituirenden Elemente derselben in einer gewissen *Ordnung* aufeinander folgen und in einer bestimmten Reihenfolge der Plätze überblickt werden sollen.

Zu der Kathegorie dieser Größen würde offenbar die *Anzahl* von Permutationen gehören, welche sich aus den Elementen 1, 2, 3 bilden lassen. Die fraglichen Permutationen sind 123, 132, 213, 231, 312, 321; die aus ihnen zu bildenden *Anzahlen* sind 1, 2, 3, 4, 5, 6. Zuvörderst leuchtet ein, daß eine jede dieser Anzahlen immer eine *ganze* Zahl oder eine *diskrete* Größe sein muß, deren einfacher Theil Eine Permutation ist, und daß deren Werth in dem vorliegenden Falle die Zahl 6 nicht überschreiten kann. Es fragt sich, woran bei den gegenwärtigen Größen die allen Größenbildungen nothwendigen Begriffe der *Stetigkeit* und der *Richtung* zu erkennen seien, was man also unter halben, Viertel- ꝛc. Permutationen zu verstehen habe, und was positive, negative und solche Permutationen sein, welche in den Faktor $\sqrt{-1}$ multiplizirt sind.

Was den Begriff der Stetigkeit betrifft; so leuchtet ein, daß die Vorstellung von einer Ordnungsgröße der vorstehenden Art das Vorhandensein gewisser der Lage oder Reihenfolge nach von einander verschiedener, sonst aber fest bestimmter Örter im Raume voraussetzt, welche von gegebenen Elementen eingenommen werden sollen. Diese Elemente vertauschen nach und nach ihre Örter mit einander, indem sich irgend Eines von seiner Stelle nach einer beliebigen anderen bewegt, während das in der letzteren Stelle befindliche Element seinen Platz verläßt, um in gleicher Weise in einen anderen zu rücken. Dieser Wechsel mit den Stellen kann nicht abrupt gedacht werden; die Elemente müssen eine *stetige* Bewegung im Raume einschlagen, und demnach sukzessive durch unendlich viele intermediäre Örter schreiten. Außerdem ist diese Bewegung durch das Gesetz des Permutirens einer gewissen Regel unterworfen, bei deren Beobachtung sich allmählig die einzelnen Permutationen 123, 132, 213 ꝛc. auseinander entwickeln. Bei der Bildung einer jeden späteren Permutation aus der vorhergehenden kann man sich denken, ein jedes Element werde in eine *gleichförmige* Bewegung versetzt, welche zwar für verschiedene Elemente verschieden sein kann, aber doch von der Art ist, daß alle Elemente in den ihnen bestimmten Örtern zu gleicher Zeit ankommen. Werden nun die Elemente bei diesen Bewegungen in irgend einem Augenblicke angehalten, bevor sie ihre Wege ganz vollendet haben; so werden dieselben offenbar keine solche Permutation bilden, deren Ordnungsnummer eine *ganze* Zahl ist, sondern vielmehr eine Form, deren Ordnungsnummer durch eine *gebrochene* oder *gemischte* Zahl dargestellt wird (siehe ein ganz analoges, in seinen Grundzügen nur etwas einfacheres Beispiel in §. 55). Nachdem man durch die Regel des Permutirens z. B. die beiden ersten Formen 123 und 132 hergestellt hat, von welchen also die letztere der obigen Reihenfolge nach die 2te Permutation ist, würde man die 3te Form 213 aus der vorhergehenden 132 erhalten, wenn man resp. das Element 1 in die zweite, das Element 3 in dritte und das Element 2 in die erste Stelle treten ließe. Hielte man nun diese Elemente in den Mitten ihrer respektiven Wege an, sodaß sich das Element 1 in der Mitte zwischen der ersten und zweiten, das Element 3 in der Mitte zwischen der zweiten und dritten

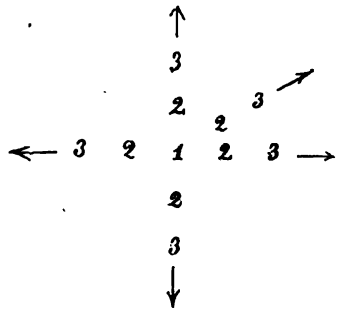
und das Element 2 in der zweiten Stelle befände; so würde man eine Permutation erhalten, welche erst *halb* vollendet wäre und demnach den Namen *einer halben* Permutation verdiente: da dieselbe den Übergang zwischen der 2ten und 3ten Permutation bezeichnet; so würde sie in der obigen Reihenfolge die 2½te Permutation darstellen. In ähnlicher Weise wird man sich zu erklären haben, was eine Viertel-, Achtel- ꝛc. Permutation sei.

Der Begriff der *Richtung* ist an dem Wesen der hier in Rede stehenden Ordnungsgrößen unzweideutig ausgeprägt. Die den einzelnen Elementen einer jeden Permutation angehörigen Stellen werden nach einer bestimmten Seite hin gezählt, und es ist eine stillschweigende Bedingung, daß die Reihenfolge der Elemente stets nach derselben Richtung, z. B. von der Linken nach der Rechten, überblickt werde. Insofern man nun nicht die bloße Existenz einer Ordnungsgröße der obigen Art ins Auge faßt, sondern dieselbe auch in der bestimmten Richtung, welche sie im Raume einnimmt, anschauet, um sie von ganz ähnlichen Größen zu unterscheiden, welche nur in anderen Richtungen gebildet sind, heißt dieselbe eine *positive* Permutation.

Es leuchtet ein, daß eine *negative* Permutation eine solche sein wird, welche hinsichtlich der absoluten Anordnung ihrer Elemente ganz so, wie eine positive Form konstruirt ist, welche aber mit der ausdrücklichen Bedingung gegeben ist, daß sie in der Richtung von der Rechten nach der Linken überblickt werden solle.

Im Obigen wurde erläutert, wie man sich die Entstehung der dritten Permutation 213 aus der zweiten 132 zu denken und welche Vorstellung man mit einer Form zu verbinden habe, die z. B. in der Mitte zwischen der zweiten und dritten läge und der Reihe nach die 2½te sein würde. Diese Erörterung war leicht, da man die beiden Endglieder (nämlich die zweite und dritte Permutation) kannte, zwischen welchen nur die einzelnen Übergänge darzustellen waren. Es fragt sich jetzt noch, von welcher Beschaffenheit die Permutationen sein würden, die der Reihe nach *vor der ersten* 123 lägen, und deren Ordnungsnummern durch lauter ächte Brüche, wie ¼, ½ ꝛc. ausgedrückt werden müßten. Zu dieser Erkenntniß würde man offenbar ganz in der früheren Weise gelangen, wenn man von derjenigen Form eine ge-

nügende Vorstellung hätte, die in der obigen Reihe der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten ꝛc. Permutation das Glied 0 (oder, etwas uneigentlich, die 0te Permutation) repräsentirte. Beachtet man aber, daß das Glied 0 die arithmetische Mitte zwischen den Gliedern $+1$ und -1 hält; so leuchtet ein, daß man die zuletzt erwähnte Permutation 0 erhalten wird, wenn man die positive Form 123 $\Rightarrow$ in die negative $\Leftarrow$ 321 (s. die seitstehende Figur) übergehen läßt, und die Elemente in den Mitten ihrer respektiven Wege festhält. Man findet, daß in diesem Augenblicke sämmtliche Element in Ein und demselben geometrischen Orte zusammenfallen, und daß also die Permutation 0 durch eine Form dargestellt wird, in welcher alle Elemente eine einzige gemeinschaftliche Stelle einnehmen. Eine solche Form besitzt den Charakter von Anordnung in einer gewissen Reihe und den von Richtung durchaus nicht, wie es auch nothwendig ist, da der erstere Begriff ohne den letzteren nicht gedacht werden kann, dieser letztere aber in der vorliegenden Form gänzlich vernichtet sein muß, da sie die Gränze zwischen den in positiver und negativer Richtung gebildeten Permutationen bezeichnet, und sowol der Einen, wie der anderen zugezählt werden kann. Durch einen Übergang der Permutation 0 in die Permutation 1 entstehen nun sämmtliche Formen, deren Ordnungsnummern die ächten Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ꝛc. sind.



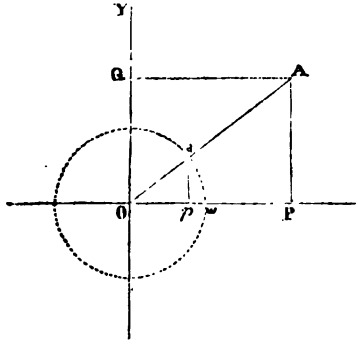
Endlich erkennt man ohne Schwierigkeit, daß imaginäre oder mit dem Zeichen $\pm\sqrt{-1}$ behaftete Permutationen solche sind, deren Gliederfolge in einer vertikalen Richtung von unten nach oben oder von oben nach unten (s. die obige Figur) überblickt werden soll, während partiell imaginäre oder mit dem Zeichen $(-)^m = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$ versehenen Permutationen dadurch charakterisirt werden, daß ihre Richtung unter einem Winkel $\varphi = m\pi$ gegen die horizontale Richtung, in welcher die positiven Permutationen gebildet und überblickt werden, geneigt ist.

Dritter Abſchnitt.

Anwendung der Theorie der imaginären Zahlen auf die ebene Geometrie.

§. 65. Allgemeiner arithmetiſcher Ausdruck für eine begränzte gerade Linie, welche ſowol ihrer Länge, wie ihrer Richtung nach betrachtet wird.

O ſei ein beliebiger im Raume angenommener Punkt und OX eine gerade Linie, welche ſich von dieſem Punkte aus nach Einer Seite ins Unbegränzte erſtreckt. Wählt man dieſe Linie dazu, um durch ihre verſchiedenen Abſchnitte alle übrigen Linien zu meſſen, welche ihren Anfang in O nehmen und in Ein und derſelben durch OX gelegten Ebene liegen, betrachtet alſo OX als die poſitive reelle Axe; ſo wird eine jede Linie, wie OA, nach § 48. durch die Formel



$$(OA) = (-)^m a = a e^{\varphi\sqrt{-1}} = a(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) \quad \ldots.(1)$$

dargeſtellt werden. Hierin bezeichnet a die abſolute Länge OA der fraglichen Linie, gemeſſen durch irgend eine Längeneinheit $O\omega = O\alpha$, und $m\pi = \varphi = \omega\alpha$ den Bogen des Rei-

gungswinkels AOX jener Linie in einem Kreise, dessen Halbmesser gleich der Längeneinheit ist. $(-)^m = e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}$ ist der Richtungskoeffizient der Linie (OA), und stellt gleichzeitig die Einheit (Oα), deren absolute Länge $=1$ ist, dar, aus welcher die Linie (OA) durch geradlinigen Fortschritt in der Richtung OA ebenso entstanden ist, wie die positive Linie a aus der positiven Längeneinheit durch Fortschritt in der Axe AX entstanden gedacht wird. Daß die Linie OA sowol ihrer absoluten Länge, wie ihrer Richtung nach betrachtet werden soll, wird durch eine Einschließung derselben in Klammern angedeutet. Durch den letzteren Ausdruck $a\cos\varphi + a\sin\varphi.\sqrt{-1}$ wird die Linie (OA), als aus zwei Theilen bestehend, angegeben, von denen der erstere in der Richtung der reellen Axe OX und der letztere in der Richtung der darauf perpendikular stehenden imaginären Axe OY liegt. Denkt man sich von dem Endpunkte A der Geraden OA ein Perpendikel AP auf die reelle Axe gefällt; so ist $(OP) = a\cos\varphi$ und $(PA) = a\sin\varphi.\sqrt{-1}$. Dächte man sich von A auf die imaginäre Axe OY das Perpendikal AQ gefällt; so würde nach §. 48 auch $(OQ) = a\sin\varphi.\sqrt{-1}$ und $QA = a\cos\varphi$ sein.

Der Winkel φ wird immer von dem Punkte ω aus nach Ein und derselben Seite im Kreise $\omega\alpha$ herum gerechnet, sodaß die verschiedenen Lagen, in welche die Linie OA kommen kann, durch eine stetige Drehung der positiven Linie a nach Ein und derselben Seite um den Nullpunkt herum entstanden gedacht werden. Soll demnach durch die obige Formel eine positive Linie dargestellt werden; so hat man (wenn man nur Drehungen betrachten will, welche eine ganze Umdrehung um den Nullpunkt nicht überschreiten) $m = 0$ und $\varphi = 0$ zu setzen, wodurch man

$$(OA) = (-)^0 a = ae^0 = a$$

erhält. Soll die Formel eine positiv imaginäre Linie darstellen; so hat man $m = \frac{1}{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, wodurch man

$$(OA) = (-)^{\frac{1}{2}} a = ae^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = a\sqrt{-1}$$

erhält. Für eine negative Linie würde man $m = 1$ und $\varphi = \pi$ zu setzen haben, was

$$(OA) = (-)^1 a = a e^{\pi\sqrt{-1}} = -a$$

ergibt. Für eine negativ imaginäre Linie hätte man endlich $\varkappa = \frac{3}{4}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ zu substituiren, wodurch man

$$(OA) = (-)^{\frac{3}{2}} a = a e^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}} = -a\sqrt{-1}$$

erhalten würde.

Wenn man den Winkel φ negativ nimmt; so entspricht Dies einer Entstehung der Linie (OA) durch eine der früheren entgegengesetzte Drehung der positiven Länge a um den Nullpunkt herum.

Drückt man die beiden Längen der beiden rechtwinkligen Theile (OP) und (PA) resp. in den Richtungen der reellen und der imaginären Axe durch p und q aus, setzt also

$$p = a\cos\varphi \text{ und } q = a\sin\varphi, \qquad \ldots.(2)$$

sodaß p und q sowol positive, wie negative reelle Linien darstellen; so geht die Formel (1) in

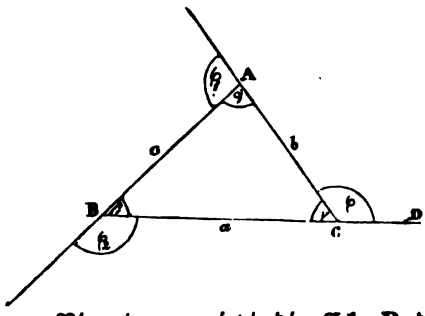
$$(OA) = p + q\sqrt{-1}$$

über, und man hat, wenn man von dieser Form auf die Gleichung (1) zurückschließen will, für die absolute Länge und den Neigungswinkel der Linie (OA) die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{p^2+q^2} \text{ und } \operatorname{tang}\varphi = \frac{q}{p} \\ \text{oder } \varphi = \text{arc. tang } \frac{q}{p} \end{array}\right\} \qquad \ldots.(3)$$

§. 66. Die Summe der drei inneren Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei rechten oder die Summe der Bögen dieser Winkel ist gleich π.

ABC sei irgend ein Dreieck. Die Längen seiner drei Seiten werden in der seitwärts angegebenen Weise durch a, b, c und die von diesen Seiten eingeschlossenen inneren Winkel durch



α, β, γ dargestellt. Außerdem bezeichnen φ, φ_1, φ_2 die äußeren Winkel dieses Dreiecks nach Maaßgabe der Figur, sodaß sich resp. die Winkel γ und φ, α und φ_1, β und φ_2 zu zwei rechten oder zu π ergänzen.

Nimmt man jetzt die Ecke B des Dreiecks als Nullpunkt und die Seite BC zur positiven reellen Axe an; so ist

$$(BA) = c(\cos\beta + \sin\beta . \sqrt{-1}) \qquad \ldots . (4)$$

Wenn C der Nullpunkt wäre; so würde man bei derselben Lage der reellen Axe, wenn man berücksichtigt, daß $ACD = \varphi$ der Neigungswinkel der Linie CA gegen diese Axe ist,

$$(CA) = b(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) = b(-\cos\gamma + \sin\gamma . \sqrt{-1}) \ldots . (5)$$

haben.

Nach §. 49 stellt irgend eine Seite einer geschlossenen geradlinigen Figur die Summe aller übrigen dar; man hat also

$$(BA) = (BC) + (CA) \text{ d. i.}$$

nach Gleichung (4) und (5) und da $(BC) = a$ ist,

$$c(\cos\beta + \sin\beta . \sqrt{-1}) = a + b(-\cos\gamma + \sin\gamma . \sqrt{-1}),$$

oder, das Reelle dem Reellen und das Imaginäre dem Imaginären gleich gesetzt (§. 48),

$$c\cos\beta = a - b\cos\gamma \text{ und } c\sin\beta = b\sin\gamma \qquad \ldots . (6)$$

Denkt man sich jetzt den Nullpunkt in C und die reelle Axe in CA verlegt, und drückt aus, daß für diese Lage

$$(CB) = (CA) + (AB)$$

sein müsse; so erhält man auf ganz ähnliche Weise die beiden Gleichungen

$$a\cos\gamma = b - c\cos\alpha \text{ und } a\sin\gamma = c\sin\alpha \quad \ldots\ldots(7)$$

Denkt man sich endlich den Nullpunkt in A und die reelle Axe in die Richtung AB gelegt, und drückt aus, daß

$$(AC) = (AB) + (BC)$$

sein müsse; so erhält man

$$b\cos\alpha = c - a\cos\beta \text{ und } b\sin\alpha = a\sin\beta \quad \ldots\ldots(8)$$

Aus den letzteren Gleichungen (6), (7), (8) folgt, wenn man überall mit c dividirt,

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{a}{c} - \frac{b}{c}\cos\gamma, \\ \frac{a}{c}\cos\gamma &= \frac{b}{c} - \cos\alpha, \\ \frac{b}{c}\cos\alpha &= 1 - \frac{a}{c}\cos\beta \end{aligned}\right\} \text{ und } \begin{aligned} \frac{b}{c} &= \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \\ \frac{a}{c} &= \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}. \end{aligned}$$

Durch Einführung der Werthe von $\frac{b}{c}$ und $\frac{a}{c}$ in die ersten drei dieser Gleichungen werden dieselben

$$\cos\beta = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} - \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cos\gamma,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cos\gamma = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} - \cos\alpha,$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cos\alpha = 1 - \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cos\beta,$$

oder wenn man überall mit $\sin\gamma$ multiplizirt und gehörig reduzirt,

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma &= \sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha, \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma &= \sin(\alpha+\gamma) = \sin\beta, \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta &= \sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(9)$$

Diesen Gleichungen kann einzeln nach §. 47 durch folgende Werthe ein Genüge geleistet werden

$$\text{I, } \beta+\gamma=2i\pi+\alpha \text{ oder II, } \beta+\gamma=(2i+1)\pi-\alpha,$$
$$\text{III, } \alpha+\gamma=2i\pi+\beta \text{ oder IV, } \alpha+\gamma=(2i+1)\pi-\beta,$$
$$\text{V, } \alpha+\beta=2i\pi+\gamma \text{ oder VI, } \alpha+\beta=(2i+1)\pi-\gamma,$$

worin i eine positive oder negative ganze Zahl, die 0 mit eingeschlossen, bedeuten kann.

Läßt man die drei Werthe I, III, V gelten, und addirt dieselben; so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$\alpha+\beta+\gamma=2i\pi,$$

worin i für irgend eine ganze Zahl steht, also

$$\alpha+\beta=2i\pi-\gamma,$$

im Resultat, welches den obigen Bedingungen (9) widerspricht, weil hiernach $\sin(\alpha+\beta)=-\sin\gamma$, also auch $\sin\gamma=-\sin\gamma$ sein müßte.

Nimmt man von den Gleichungen I, III, V irgend zwei und von den Gleichungen II, IV, VI die entsprechende dritte, z. B. die Gleichungen I, III, VI; so erhält man durch Addition derselben

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=(2i+1)\pi+\alpha+\beta-\gamma,$$

also

$$\alpha+\beta=(2i+1)\pi-3\gamma,$$

was den obigen Bedingungen (9) ebenfalls nicht entspricht, weil hiernach $\sin(\alpha+\beta)=\sin 3\gamma$, also auch allgemein $\sin\gamma=\sin 3\gamma$ sein müßte.

Nimmt man von den drei Gleichungen I, III, V nur Eine und von den Gleichungen II, IV, VI die entsprechenden beiden andern, z. B. die Gleichungen I, IV, VI; so ergibt eine Addition derselben

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=2i\pi+\alpha-\beta-\gamma,$$

also

$$\alpha=2i\pi-3(\beta+\gamma),$$

ein Resultat, welches ebensowenig, den Bedingungen (9) ein Ge-

nüge leistet, da hiernach $\sin\alpha = \sin 3(\beta+\gamma)$, also auch allgemein $\sin(\beta+\gamma) = \sin 3(\beta+\gamma)$ sein müßte.

Nimmt man nun endlich die drei Gleichungen II, IV, VI; so erhält man durch Addition derselben

$$3(\alpha+\beta+\gamma) = (2i+1)\pi \text{ oder}$$

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{2i+1}{3}\pi \text{ oder}$$

$$\alpha+\beta = \frac{2i+1}{3}\pi - \gamma.$$

Damit nun $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$ sein könne, wie es nach den Bedingungen (9) nothwendig ist, muß die Zahl $2i+1$ irgend ein Vielfaches des Nenners 3 sein. Der kleinste Werth von i, welcher dieser Forderung ein Genüge leistet, ist 1; man kann also setzen $\alpha+\beta = \pi-\gamma$ oder

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi \qquad \ldots.(10)$$

Der nächstfolgende Werth von i, welcher die vorstehende Forderung erfüllt, würde $i=4$ sein. Alsdann hätte man aber $\alpha+\beta+\gamma = 3\pi$, was unmöglich ist, da die Summe der drei innern Winkel eines Dreiecks inkl. der drei äußeren Winkel φ, φ_1, φ_2 gleich 3π ist, mithin $\alpha+\beta+\gamma < 3\pi$ sein muß.

Da noch größere Werthe für i aus demselben Grunde zu verwerfen sind, wie der Werth $i=4$, und da für i auch keine negativen Werthe zulässig sind, indem $i=-1$ den Bedingungen (9) kein Genüge leisten und alle der Quantität nach größeren negativen Werthe von i zu dem absurden Resultate: $\alpha+\beta+\gamma =$ einer negativen Größe, führen würden; so folgt, daß die Summe $\alpha+\beta+\gamma$ nur gleich π; oder daß die Summe der drei innern Winkel eines Dreiecks nur gleich 2 rechten sein kann.

Aus diesem Satze geht ferner hervor, daß irgend ein äußerer Winkel eines Dreiecks gleich der Summe der beiden ihm im Dreiecke gegenüberliegenden Winkel ist.

§. 67. Die Summe aller inneren Winkel eines n Ecks ist gleich $(n-2)\pi$ und die aller äußeren Winkel gleich 2π.

Da man eine jede ebene $n$seitige Figur durch Diagonalen in $n-2$ Dreiecke zerlegt werden kann; so folgt, daß die Summe $\Sigma\alpha$ aller inneren Winkel einer solchen Figur gleich

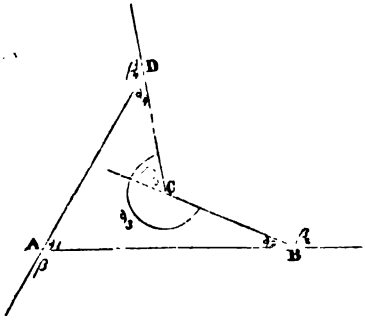
$$\Sigma\alpha = (n-2)\pi \qquad \ldots . (11)$$

sei.

Wenn man alle Seiten dieser Figur in denjenigen Richtungen verlängert, in welchen ein Punkt den Umfang derselben stetig durchlaufen würde; so sei an irgend einer Ecke der innere Winkel zwischen den beiden angränzenden Seiten $=\alpha$ und der äußere Winkel oder der Winkel zwischen der Einen Seite oder Verlängerung der anderen Seite $=\beta$. Bezeichnet man nun mit $\Sigma\alpha$ die Summe aller inneren Winkel; so ist $\Sigma\alpha=(n-2)\pi$. Wenn aber das nEck nur ausspringende Ecken enthält, welche sich dadurch charakterisiren, daß der innere Winkel im 1sten oder 2ten Quadranten liegt, oder daß die obigen Verlängerungen der einzelnen Seiten sämmtlich außerhalb der Figur liegen; so ist immer $\alpha+\beta=\pi$, also $\Sigma(\alpha+\beta)=\Sigma\alpha+\Sigma\beta=n\pi$. Hieraus und aus der vorhergehenden Beziehung folgt

$$\Sigma\beta = 2\pi, \qquad \ldots . (12)$$

d. i. die Summe der äußeren Winkel irgend eines Vielecks mit lauter ausspringenden Ecken ist gleich 2π oder gleich 4 rechten.



Wenn die Figur einspringende Ecken enthält, welche daran kenntlich sind, daß der innere Winkel im 3ten oder 4ten Quadranten liegt, oder daß die Verlängerung der Einen Seite an einer solchen Ecke nicht außerhalb der Figur liegt, wie in der seitstehenden Figur bei C; so leuchtet ein, daß für eine jede derartige Ecke nicht

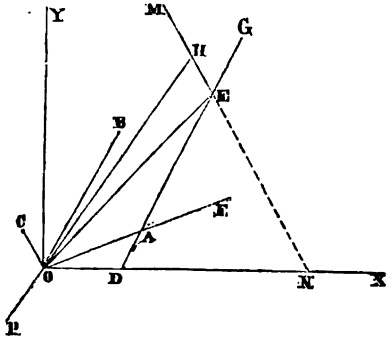
$\alpha+\beta$, sondern $\alpha-\beta=\pi$ ist. Bezeichnet man daher die äußeren Winkel an den ausspringenden Ecken mit β und die an den einspringenden Ecken mit β'; so hat man offenbar

$$\Sigma\beta-\Sigma\beta'=2\pi, \qquad \ldots\ (13)$$

d. h. bei irgend einem Vielecke mit aus- und einspringenden Ecken ist die Differenz zwischen der Summe der äußeren Winkel an den ausspringenden Ecken, und der äußeren Winkel an den einspringenden Ecken gleich 2π oder gleich 4 rechten.

§. 68. Abkürzung des Verfahrens bei der Addition und Subtraktion mehrerer Linien.

Um die beiden Linien $(OA)=a(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})$ und $(OB)=b(\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1})$ zu addiren, sollte man nach der Vorschrift des §. 49 von dem Endpunkte A der Einen in einer Richtung DAE fortschreiten, welche mit der reellen Axe den Winkel $EDX=BOX=\beta$ bildet. Verlängert man nun OA über A hinaus nach F und bezeichnet den Winkel EAF mit φ; so ist auch Winkel $OAD=\varphi$, Winkel $ODA=\pi-\beta$ und nach §. 66.



$$\alpha+(\pi-\beta)+\varphi=\pi;\ \text{mithin}$$
$$\varphi=\beta-\alpha=<BOA. \qquad \ldots\ (14)$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich folgendes einfache Verfahren, nach welchem die Addition oder Subtraktion zweier Linien auszuführen ist. Man schreite vom Endpunkte A der Einen um die Länge der Anderen in einer Richtung AE (oder bei der Subtraktion in deren Verlängerung (AD) fort, welche mit der Verlängerung von (OA) den Winkel $EAF=\beta-\alpha=BOA$ einschließt.

Soll zu der Summe (OE)=(OA)+(OB) noch eine dritte Linie (OC)=c(cosγ+sinγ√−1) addirt werden; ſo wird man vom Punkte E um die abſolute Länge EH=OC=c in einer Richtung EH fortſchreiten, welche ſich gegen die Verlängerung von AE unter dem Winkel HEG=COB=γ−β neigt, oder auch welche ſich gegen die Verlängerung von OE unter einem Winkel =COE neigt: denn denkt man ſich die HE bis zu ihrem Durchſchnittspunkte N mit der Axe OX verlängert; ſo wird wegen des Dreiecks EDN ∠HNX=EDN+DEN=EDN+HEG= =β+(γ−β)=γ ſein. (OH) ſtellt alsdann die Summe der drei Linien (OA), (OB) und (OC) oder (OA), (AE) und (EH) dar, oder es iſt

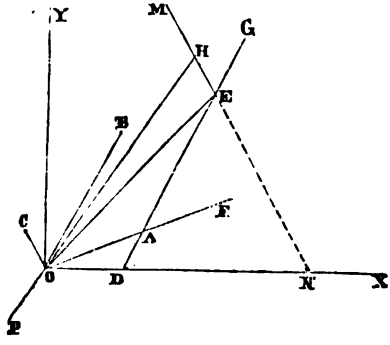
$$(OH)=(OA)+(AE)+(EH). \quad \ldots\ (15)$$

Nimmt man alle Seiten des Vielecks OAEHO in den Richtungen, in welcher ein von O ausgehender Punkt den ganzen Umfang der Figur beſchreiben würde, alſo reſp. in den Richtungen OAF, AEG, EHM, HOP, ſodaß der Neigungswinkel der letzten Seite HO in der obigen Figur der überſtumpfe Winkel POX iſt; ſo hat man in der letzteren Gleichung −(HO) an die Stelle von (OH) zu ſetzen, wodurch dieſelbe

$$(OA)+(AE)+(EH)+(HO)=0 \quad \ldots\ (16)$$

wird. Dieſelbe lehrt, daß die arithmetiſche Summe aller Seiten irgend eines Vielecks, wenn dieſelben in den eben erwähnten Richtungen genommen werden, gleich null iſt, wie ſchon im §. 49 gezeigt iſt.

§. 69. Aus den Betrachtungen des vorſtehenden §s folgt umgekehrt, daß wenn OAEHO irgend ein Vieleck iſt, durch deſſen Ecke O man eine feſte Axe OX gelegt hat, und man verlängert die einzelnen Seiten in den Richtungen, in welchen ein von O ausgehender Punkt den ganzen Umfang der Figur ſtetig durchlaufen würde, alſo OA nach F, AE nach G, EH nach M,



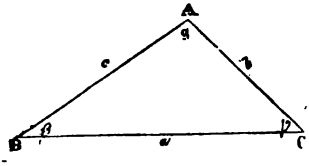
HO nach P, trägt darauf an den Punkt O die Linien OA, OB, OC, OP, welche miteinander und mit der Axe OX die Winkel AOX=AOX, BOA=EAF, COB=HEG, POC=OHM einschließen; so werden sich diese Linien gegen die Axe OX resp. unter denselben Winkeln neigen, unter welchen die entsprechenden Seiten der Figur oder deren Verlängerungen dieselbe Axe OX durchschneiden, d. h. es wird sein $< AOX = AOX$, $BOX = EDX$, $COX = HNX$, und OP wird die Verlängerung von HO sein.

Das Dreieck.

§. 70. Beziehungen zwischen den drei Seiten und den drei Winkeln eines Dreiecks.

ABC sei das gegebene Dreieck; man bezeichne die den Ecken A, B, C gegenüber liegenden Seiten resp. mit a, b, c und die inneren Winkel an jenen Ecken resp. mit α, β, γ.

Denkt man sich den Nullpunkt in die Ecke B und die positive reelle Axe in die Richtung BC gelegt; so würde, wenn man die Seiten CA und AB in denjenigen Richtungen an den Nullpunkt trüge, in welchen ein von B ausgehender Punkt den Umfang des Dreiecks BCA stetig durchlaufen würde, CA oberhalb der reellen Axe und AB unterhalb derselben fallen, sodaß die Neigungswinkel der drei Seiten a, b, c resp. 0, $\pi - \gamma$, $\pi + \beta$ und demnach die arithmetischen Werthe dieser Seiten



$$(BC) = a,$$

$$(CA) = b[\cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \gamma).\sqrt{-1}] = -b\cos\gamma + b\sin\gamma.\sqrt{-1},$$

$$(AB) = c[\cos(\pi + \beta) + \sin(\pi + \beta).\sqrt{-1}] = -c\cos\beta - c\sin\beta.\sqrt{-1}$$

sein würden.

Da diese drei Linien eine geschlossene Figur bilden; so muß ihre arithmetische Summe gleich null sein. Addirt man also die vorstehenden Ausdrücke zusammen und setzt (§. 48) sowol die Summe der reellen, wie die der imaginären Glieder gleich null;

ſo erhält man, nachdem man die letztere Summe durch den Richtungskoeffizienten $\sqrt{-1}$ dividirt hat, die beiden Gleichungen

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta, \qquad \ldots.(17)$$

$$b\sin\gamma = c\sin\beta \qquad \ldots.(18)$$

Verbindet man mit dieſen beiden Gleichungen nach §. 66 noch die folgende

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi; \qquad \ldots.(19)$$

ſo hat man drei Gleichungen, aus welchen man je 2 der darin enthaltenen 6 Elemente des Dreiecks eliminiren und alsdann Eines der übrig bleibenden als Funktion der letzten 3 ausdrücken kann.

Zuvörderſt folgt aus der Gleichung (18)

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma,$$

und wenn man ein anderes Mal die Seite **AB** als reelle Axe annimmt, $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$; mithin allgemein

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \qquad \ldots.(20)$$

Hieraus und aus Gleichung (19) folgt auch

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad \ldots.(21)$$

Wenn man Gleichung (17) quadrirt; ſo kommt

$$a^2 = b^2\cos^2\gamma + 2bc\cos\beta\cos\gamma + c^2\cos^2\beta,$$

und weil nach Gleichung (18) $b\sin\gamma - c\sin\beta = 0$ iſt; ſo hat man auch

$$o = b^2\sin^2\gamma - 2bc\sin\beta\sin\gamma + c^2\sin^2\beta.$$

Addirt man die letzteren beiden Gleichungen, und beachtet, daß $b^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) = b^2$, $c^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = c^2$ und $\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma = \cos(\beta+\gamma)$ iſt; ſo erhält man

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\beta+\gamma),$$

oder da nach Gleichung (19) $\cos(\beta+\gamma) = -\cos(\pi-\beta-\gamma) = -\cos\alpha$ iſt,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

mithin

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} \quad \ldots\ldots (22).$$

Aus der vorstehenden Gleichung ergibt sich auch durch eine Auflösung für die Größe c

$$c = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots (23).$$

Die Gleichungen (20) bis (23) lehren, daß sich je drei Elemente eines Dreiecks berechnen lassen, wenn die anderen drei gegeben sind, mit Ausnahme des Falles, wo die drei Winkel gegeben wären, weil alsdann die Gleichung (19) keine Beziehung zwischen den bekannten und den unbekannten Elementen darstellen und man zwischen den drei unbekannten Seiten nur die beiden Gleichungen (17) und (18) behalten würde. Indessen müssen alle Dreiecke, welche dieser Bedingung ein Genüge leisten sollen, von der Art sein, daß ihre drei Seiten a, b, c in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die Sinus der gegebenen Winkel α, β, γ (s. Gleichung 20).

Außerdem bemerkt man, daß wenn zwei Seiten a und b und ein Winkel gegeben ist, welcher Einer dieser Seiten gegenüber liegt, z. B. α, die übrigen drei Stücke c, β und γ je zwei verschiedene Werthe annehmen können, wenn der Winkel α spitz oder $< \frac{\pi}{2}$ ist, aber nur je Einen Werth, wenn α ein stumpfer oder ein rechter Winkel oder $\geqq \frac{\pi}{2}$ ist. Denn aus der Gleichung (23) ersieht man, daß wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist, $b\cos\alpha$ gleich null, und wenn $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ist, $b\cos\alpha$ sogar negativ wird. In beiden Fällen kann die Wurzelgröße in jener Gleichung nur positiv genommen werden, da man für c nothwendig eine absolute Größe erhalten muß, und ist alsdann nicht mehr zweideutig. Wenn der Winkel α spitz, also $b\cos\alpha$ positiv ist, wird die Wurzelgröße $\sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} = \sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2 - b^2}$ übrigens nicht unter allen Umständen zweideutig bleiben. Man erkennt, daß dieselbe auch unter diesen Umständen nur positiv genommen werden darf, sobald die gegebene Seite $a > b$ ist, weil alsdann

der absolute Werth von $\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha} > b \cos \alpha$ ist, und man für c einen negativen Werth erhalten würde, wenn man die Wurzelgröße negativ nähme. Hieraus folgt, daß wenn drei Elemente, wie a, b und α gegeben sind, die drei anderen dann vollkommen bestimmt sein werden, sobald $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$ ist, oder auch sobald $\alpha < \frac{\pi}{2}$ und gleichzeitig die dem Winkel α gegenüberliegende Seite $a > b$ ist.

§. 71. Kongruenz der Dreiecke.

Zwei Dreiecke heißen **kongruent**, wenn sie dergestalt über einander gelegt werden können, daß sie sich vollkommen **decken**, oder wenn ihre sechs Elemente resp. einander gleich sind.

Da je drei dieser Elemente von den drei übrigen durch die im vorhergehenden Paragraphe entwickelten Beziehungen von einander abhängen; so folgt, daß zwei Dreiecke unter folgenden Umständen kongruent sein werden:

1) Wenn zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α in beiden resp. einander gleich sind; denn nach Gleichung (22) hat man für die dritte Seite

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} \qquad \ldots\ldots (24)$$

und aus einer Auflösung der Gleichung (21) für β ergibt sich

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha} \qquad \ldots\ldots (25)$$

und analog

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{c \sin \alpha}{b - c \cos \alpha} \qquad \ldots\ldots (26)$$

2) Wenn die drei Seiten a, b, c in beiden Dreiecken resp. einander gleich sind; denn aus Gleichung (22) folgt

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \ldots\ldots (27)$$

und analog

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \ldots\ldots (28)$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad \ldots\ldots (29)$$

3) Wenn zwei Winkel α und β und die dazwischen liegende Seite c in beiden Dreiecken resp. einander gleich sind; denn aus Gleichung (21) folgt

$$b = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad \ldots\ldots (30)$$

und analog

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad \ldots\ldots (31)$$

Nach der Gleichung (19) hat man aber auch für den dritten Winkel

$$\gamma = \pi - (\alpha+\beta) \qquad \ldots\ldots (32)$$

4) Wenn zwei Winkel α und β und eine Seite, welche dem Einen dieser Winkel gegenüber liegt, z. B. b in beiden resp. einander gleich sind; denn nach Gleichung (20) Dreiecken erhält man für die dem anderen Winkel α gegenüberliegende Seite

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \ldots\ldots (33)$$

nach der Gleichung (21) für die zwischen jenen beiden Winkeln liegende Seite

$$c = \frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} \qquad \ldots\ldots (34)$$

und nach der Gleichung (19) für den dritten Winkel

$$\gamma = \pi - (\alpha+\beta) \qquad \ldots\ldots (35)$$

5) Wenn zwei Seiten a und b und ein Winkel, welcher der Einen dieser Seiten gegenüberliegt, z. B. α, in beiden Dreiecken resp. einander gleich sind, unter der Voraus-

setzung, daß entweder der Winkel $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$ sei, oder wenn er $< \frac{\pi}{2}$ wäre, daß alsdann die Seite $a > b$ sei; denn für diese beiden Fälle erhält man nach Gleichung (23) für die dritte Seite den unzweideutigen Ausdruck

$$c = b\cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} \qquad \ldots\ldots (36)$$

und aus der Gleichung (20) folgt für die übrigen beiden Winkel

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha, \qquad \ldots\ldots (37)$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{a}\sin\alpha. \qquad \ldots\ldots (38)$$

§. 72. Allgemeine Eigenschaften der Seiten und Winkel eines Dreiecks.

Da der absolute Werth des Kosinus eines Winkels, welcher zwischen 0 und π liegt, immer < 1 ist; so folgt, mit Bezugnahme auf die Formel (22), daß

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ immer } < b^2 + c^2 + 2bc < (b+c)^2,$$

also auch

$$a < b + c,$$

oder daß in einem jeden Dreiecke die Summen der absoluten Längen zweier Seiten größer sei, als die dritte.

Es folgt aber auch, daß

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha > b^2 + c^2 - 2bc > (b-c)^2,$$

also

$$a > b - c,$$

oder daß in jedem Dreiecke die Differenz der absoluten Längen zweier Seiten kleiner sei, als die dritte.

Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten b und c einander gleich sind; so hat man nach Gleichung (20) $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 1$,

alſo $\sin\beta = \sin\gamma$, mithin

$$\beta = \gamma.$$

In einem gleichſchenkligen Dreiecke ſind alſo die Winkel an der Grundlinie einander gleich, und umgekehrt folgt, daß wenn in einem Dreiecke die Winkel β und γ einander gleich ſind, auch die Seiten b und c einander gleich ſein müſſen, oder daß das Dreieck gleichſchenklig ſein wird.

Wenn jedoch $b > c$; ſo iſt auch $\sin\beta > \sin\gamma$ oder

$$\beta > \gamma,$$

d. h. in einem Dreiecke ſteht der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt.

§. 73. Der Pythagoräiſche Lehrſatz.

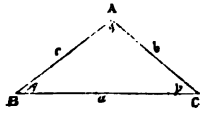
Wenn Ein Winkel des gegebenen Dreiecks, z. B. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder gleich einem rechten, alſo $\cos\alpha = 0$ iſt; ſo ergibt die Gleichung (22) das Reſultat

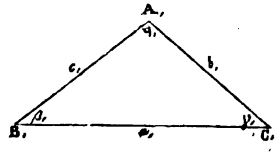
$$a^2 = b^2 + c^2. \qquad \ldots.(39)$$

Hieraus erſieht man, daß in einem rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat der abſoluten Länge der Hypotheuſe gleich der Summe der Quadrate der abſoluten Längen der beiden Katheten iſt. In dieſer wichtigen Eigenſchaft des rechtwinkligen Dreiecks beſteht der Pythagoräiſche Lehrſatz.

§. 74. Ähnlichkeit der Dreiecke.

Es iſt ſchon vorhin (§. 70) bemerkt, daß in jedem Dreiecke ABC, deſſen Winkel α, β, γ ſind, die Seiten a, b, c in dem





Verhältniſſe $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ zu einander ſtehen. Hieraus folgt, daß wenn zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ reſp. dieſelben Winkel beſitzen, ſodaß $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$ iſt, die Seiten dieſer Dreiecke die Proportion

$$a_1 : b_1 : c_1 = a : b : c \qquad \ldots\ (40)$$

bilden werden.

Umgekehrt folgt auch, daß wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten in der Proportion (40) ſtehen, die Winkel derſelben reſp. einander gleich ſein müſſen. Denn da in dem Einen Dreiecke $a_1 : b_1 : c_1 = \sin\alpha_1 : \sin\beta_1 : \sin\gamma_1$ und in dem anderen $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ iſt; ſo hat man wegen der Proportion (40)

$$\sin\alpha_1 : \sin\beta_1 : \sin\gamma_1 = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \qquad \ldots\ (41)$$

oder auch, da $\sin\gamma_1 = \sin(\alpha_1 + \beta_1)$ und $\sin\gamma = \sin(\alpha+\gamma)$ iſt (§. 66),

$$\sin\alpha_1 : \sin\beta_1 : \sin(\alpha_1+\beta_1) = \sin\alpha : \sin\beta : \sin(\alpha+\beta) \qquad \ldots\ (42)$$

Aus der Beziehung $\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ folgt $\sin\beta_1 = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin\alpha_1$, und da allgemein $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$ iſt,

$$\cos\beta_1 = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta \cdot \sin^2\alpha_1}}{\sin\alpha}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth für $\cos\beta_1$ und den vorhergehenden Werth für $\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}$ in die Beziehung

$$\frac{\sin(\alpha_1+\beta_1)}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin\alpha_1\cos\beta_1 + \sin\beta_1\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} = \cos\beta_1 + \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}\cos\alpha_1$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = \cos\beta + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cos\alpha_1,$$

und reduzirt gehörig; ſo ergibt ſich

$$\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta\sin^2\alpha_1} = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha - \sin\beta\cos\alpha_1.$$

Quadrirt man dieſe Gleichung; ſo kommt nach einigen Reduktionen, wenn man die gemeinſchaftlichen Faktoren abſondert,

$$\sin\beta . \sin(\alpha+\beta)(\cos\alpha - \cos\alpha_1) = 0$$

oder wenn man mit dem Faktor $\sin\beta . \sin(\alpha+\beta)$, welcher nicht gleich null werden kann, dividirt,

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha, \text{ alſo } \alpha_1 = \alpha,$$

und mithin wegen der Beziehungen (41) auch

$$\beta_1 = \beta \text{ und } \gamma_1 = \gamma.$$

Zwei Dreiecke, in welchen die Winkel reſp. einander gleich oder die Seiten einander proportional ſind, heißen ähnliche Dreiecke.

Die Ähnlichkeit zweier Dreiecke findet auch ſtatt, wenn zwei Seiten b, c und b_1, c_1 einander proportional ſind und der dazwiſchen liegende Winkel in beiden Dreiecken gleich, wenn alſo $\alpha_1 = \alpha$ iſt.

Denn nach Gleichung (22) hat man

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} \text{ und } a_1 = \sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 2b_1 c_1 \cos\alpha_1}$$

mithin

$$\frac{a}{b} = \sqrt{1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{b}\right)\cos\alpha} \text{ und } \frac{a_1}{b_1} = \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{b_1}\right)^2 - 2\left(\frac{c_1}{b_1}\right)\cos\alpha_1}.$$

Da nun der Vorausſetzung gemäß $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c}{b}$ und $\alpha_1 = \alpha$ iſt; ſo muß nach den vorſtehenden Gleichungen auch $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ ſein, und man hat

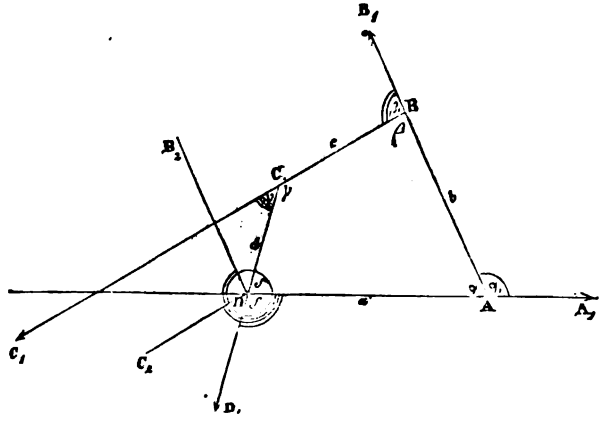
$$a_1 : b_1 : c_1 = a : b : c,$$

woraus die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke unmittelbar hervorgeht.

Das Viereck.

§. 75. Beziehungen zwiſchen den Seiten und Winkeln eines Vierecks.

ABCD ſei irgend ein Viereck, deſſen Seiten und deſſen innere und äußere Winkel in der ſeitſtehenden Weiſe bezeichnet werden. Nimmt man die Ecke D als Nullpunkt und die Richtung der Seite DA als poſitive reelle Axe an, macht darauf nach §. 69. $\angle A_1DB_2 = A_1AB = \alpha_1$, $B_2DC_2 = B_1BC = \beta_1$, $C_2DD_1 = C_1CD = \gamma_1$, mithin auch $D_1DA = \delta_1$; ſo ergeben die Linien DB_2, DC_2, DD_1 die Neigungswinkel, unter welchen die



Seiten AB, BC, CD oder deren Verlängerungen die Axe DA_1 durchſchneiden. Hiernach hat man für die arithmetiſchen Ausdrücke der Seiten des Vierecks

$$(DA) = a,$$
$$(AB) = b(\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \cdot \sqrt{-1}),$$
$$(BC) = c[\cos(\alpha_1+\beta_1) + \sin(\alpha_1+\beta_1)\cdot\sqrt{-1}],$$
$$(CD) = d[\cos(\alpha_1-\beta_1+\gamma_1) + \sin(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)\cdot\sqrt{-1}].$$

Setzt man nun die Summe dieſer Ausdrücke von Linien, welche eine geſchloſſene Figur bilden, gleich null; ſo erhält man

$$a + b(\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \cdot \sqrt{-1}) + c[\cos(\alpha_1+\beta_1) + \sin(\alpha_1+\beta_1)\cdot\sqrt{-1}]$$
$$+ d[\cos(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) + \sin(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)\cdot\sqrt{-1}] = 0,$$

oder wenn man für die äußeren Winkel α_1, β_1, γ_1 die inneren Winkel α, β, γ, δ einführt, und dabei beachtet, daß $\alpha_1=\pi-\alpha$, $\beta_1=\pi-\beta$, $\gamma_1=\pi-\gamma$ und $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ (§. 67) ist,

$$a+b(-\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})+c[\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta).\sqrt{-1}]$$
$$+d(-\cos\delta-\sin\delta.\sqrt{-1})=0,$$

oder wenn man sowol die Summe der reellen, wie die der imaginären Glieder gleich null setzt, und die letztere durch $\sqrt{-1}$ dividirt,

$$a-b\cos\alpha+c\cos(\alpha+\beta)-d\cos\delta=0 \qquad \ldots\ (43)$$

und

$$b\sin\alpha-c\sin(\alpha+\beta)-d\sin\delta=0 \qquad \ldots\ (44)$$

Verbindet man mit diesen beiden Gleichungen noch die dritte

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi; \qquad \ldots\ (45)$$

so hat man zwischen den 8 Elementen a, b, c, d, α, β, γ, δ des Vierecks 3 Beziehungen, und man erkennt, daß sich vermittelst derselben 3 Elemente berechnen lassen, wenn die übrigen 5 gegeben sind, indessen bleibt hiervon der Fall ausgeschlossen, wo die vier Winkel und außerdem Eine Seite gegeben ist, weil alsdann die Gleichung (45) keine Beziehung zwischen den gegebenen und den gesuchten Elementen darbietet: es können überhaupt immer nur drei Winkel als gegeben angesehen werden, da alsdann der vierte durch diese Gleichung schon von selbst bestimmt ist.

§. 76. Eigenschaften der Parallelogramme.

Für den Fall, daß je zwei in einem Viereck sich diagonal gegenüberliegende Winkel einander gleich, daß also

$$\alpha=\gamma \text{ und } \beta=\delta,$$

mithin

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta=\pi \text{ und auch } \delta=\pi-\gamma=\pi-\alpha$$

(s. Gl. 45) wäre, würden sich die Gleichungen (43) und (44) des vorstehenden Paragraphs auf

$$a - b\cos\alpha - c + d\cos\alpha = 0 \qquad \ldots\ldots (46)$$

und

$$b\sin\alpha - d\sin\alpha = 0 \qquad \ldots\ldots (47)$$

reduziren. Hieraus folgt

$$b = d \text{ und } a = c.$$

In einem Viereck also, in welchem die gegenüberliegenden Winkel paarweise einander gleich sind, haben auch die einander gegenüberliegenden Seiten gleiche Längen.

Nimmt man an, in einem Viereck seien die einander gegenüberliegenden Seiten, resp. gleich, also $c=a$ und $d=b$; so erhält man aus den Gleichungen (43) und (44)

$$a - b\cos\alpha + a\cos(\alpha+\beta) - b\cos\delta = 0 \qquad \ldots\ldots (48)$$

und

$$b\sin\alpha - a\sin(\alpha+\beta) - b\sin\delta = 0 \qquad \ldots\ldots (49)$$

Dividirt man diese beiden Gleichungen durch b und setzt den aus der Einen für $\frac{a}{b}$ sich ergebenden Werth in die andere; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$\sin\alpha - \sin\delta - \cos\alpha\sin(\alpha+\beta)$$
$$+ \sin\alpha\cos(\alpha+\beta) - \sin\delta\cos(\alpha+\beta) - \cos\delta\sin(\alpha+\beta) = 0,$$

d. i., da $\cos\alpha\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin\beta$

und $\sin\delta\cos(\alpha+\beta) + \cos\delta\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta+\delta) = -\sin\gamma$ ist,

$$\sin\alpha - \sin\delta - \sin\beta + \sin\gamma = 0$$

oder

$$\sin\alpha + \sin\gamma = \sin\beta + \sin\delta \qquad \ldots\ldots (50)$$

Nach der allgemeinen Formel

$$\sin(\varphi+\psi) + \sin(\varphi-\psi) = 2\sin\varphi\sin\psi \text{ oder}$$

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$

erhält man nun

$$\sin\alpha+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\text{ und}$$

$$\sin\beta+\sin\delta=2\sin\frac{\beta+\delta}{2}.\cos\frac{\beta-\delta}{2},$$

alſo wegen Gleichung (50)

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=\sin\frac{\beta+\delta}{2}.\cos\frac{\beta-\delta}{2},$$

oder da $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$, alſo $\frac{\beta+\delta}{2}=\pi-\frac{\alpha+\gamma}{2}$ und

$$\frac{\beta-\delta}{2}=\beta+\frac{\alpha+\gamma}{2}-\pi\text{ iſt,}$$

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=-\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.\cos\left(\beta+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

oder auch

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=-\cos\left(\beta+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\qquad\ldots.(51)$$

Dieſer Gleichung kann entweder durch die Beziehung

$$\left(\beta+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)+\frac{\alpha-\gamma}{2}=(2i+1)\pi,\text{ d. i.}$$

$$\alpha+\beta=(2i+1)\pi\qquad\ldots.(52)$$

oder durch die Beziehung

$$\left(\beta+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)-\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)=(2i+1)\pi,\text{ d. i.}$$

$$\beta+\gamma=(2i+1)\pi,\qquad\ldots.(53)$$

worin i jede ganze Zahl, die 0 mit eingeſchloſſen, bezeichnet, ein Genüge geleiſtet werden. Da aber die Summe aller vier Winkel $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ iſt, alſo ſowol $\alpha+\beta<2\pi$, wie auch $\beta+\gamma<2\pi$ ſein muß; ſo folgt, daß i nur $=0$, und mithin entweder nur

$$\alpha+\beta=\pi\qquad\ldots.(54)$$

oder

$$\beta+\gamma=\pi \qquad \ldots.(55)$$

sein kann.

Für die erstere Annahme (54) folgt, da $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ ist, daß auch

$$\gamma+\delta=\pi \qquad \ldots.(56)$$

sei, und für die zweite Annahme (55) folgt, daß auch

$$\alpha+\delta=\pi \qquad \ldots.(57)$$

sei.

Nach der obigen Beziehung (50) muß nun, wenn man die erstere Voraussetzung, also die Gleichungen (54) und (56) gelten läßt,

$$\sin\alpha+\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\gamma, \text{ also}$$

$$\sin\alpha=\sin\gamma \qquad \ldots.(58)$$

sein. Dieser Bedingung wird ein Genüge geleistet, sowol durch $\alpha=\gamma$, wie durch $\alpha+\gamma=\pi$. Die letztere Gleichung würde jedoch in Verbindung mit den beiden (54) und (56) zu dem Resultate $\alpha=\delta$ und $\beta=\gamma$, und wenn man diesen Werth für δ und den für $\alpha+\beta$ aus Gleichung (54) in die frühere Gleichung (48) substituirte, zu dem Resultate $b\cos\alpha=0$ führen. Da dieses Resultat unmöglich ist, wofern nicht $\alpha=\frac{\pi}{2}$ und demnach $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{\pi}{2}$ ist; so kann allgemein nur

$$\alpha=\gamma \text{ und demnach } \beta=\delta$$

sein.

Ließe man die zweite Voraussetzung, also die Gleichungen (55) und (57) gelten; so würde man ebenfalls zu dem Schlusse gelangen, daß entweder nur $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{\pi}{2}$ oder allgemein

$$\alpha=\gamma \text{ und } \beta=\delta$$

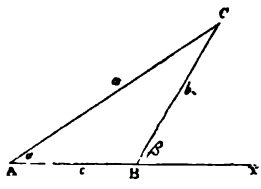
sein könne.

In einem Vierecke, in welchem die einander gegenüberliegenden Seiten gleiche Länge haben, sind also auch die einander gegenüberliegenden Winkel gleich, und umgekehrt.

Vierecke von der vorstehenden Beschaffenheit heißen Parallelogramme. Dieselben werden zu Rechtecken, wenn ein jeder der vier Winkel ein rechter $= \frac{\pi}{2}$ ist.

Parallellinien.

§. 77. AC und BC seien zwei gerade Linien, welche sich in C treffen und die reelle Axe AX unter den Winkeln $CAX = \alpha$ und $CBX = \beta$ durchschneiden. Ferner sei die absolute Länge $AC = a$, $BC = b$, $AB = c$, also für den Punkt A, als Nullpunkt,



$$(AC) = a(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1})$$
$$(BC) = b(\cos\beta + \sin\beta . \sqrt{-1})$$
$$(AB) = c;$$

alsdann hat man, weil diese drei Linien eine geschlossene Figur bilden (§. 68)

$$(AC) = (AB) + (BC), \text{ d. i.}$$

$$a\cos\alpha + a\sin\alpha . \sqrt{-1} = c + b\cos\beta + b\sin\beta . \sqrt{-1};$$

mithin

$$a\cos\alpha = c + b\cos\beta \qquad \ldots\ldots (59)$$

und

$$a\sin\alpha = b\sin\beta \qquad \ldots\ldots (60)$$

Substituirt man den Werth $b = \frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$, welcher sich aus (60) ergibt, in die Gleichung (59), und löst dieselbe für a auf; so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$a = \frac{c\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \qquad \ldots\ldots (61).$$

Aus dieser Formel erkennt man, daß wenn der Winkel $\beta = \alpha$ ist, die Länge des Vektors $AC = a$ unendlich groß werden wird, d. h. zwei in derselben Ebene liegende gerade Linien, wie

AC und BC, welche sich unter denselben Winkeln gegen eine dritte Linie AX neigen, treffen sich erst in unendlicher Entfernung, oder sie treffen sich nie, wie weit man dieselben auch verlängern möge. Solche Linien heißen parallel.

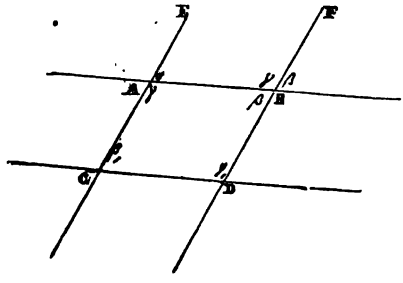
Die Formel (61) lehrt aber auch umgekehrt, daß wenn zwei Linien AC und BC parallel sein oder sich erst in unendlicher Entfernung treffen sollen, ihre Neigungswinkel α und β gegen irgend eine dritte sie durchschneidende Linie AX gleich groß sein müssen. Denn wenn

$$a = \frac{c \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} = \infty$$

sein soll; so muß nothwendig $\sin(\beta - \alpha) = 0$ oder $\beta = \alpha$ sein.

Da $\beta - \alpha = \sphericalangle ACB$ ist; so sieht man, daß der Neigungswinkel zweier Parallellinien gegen einander gleich null ist.

§. 78. Wenn die beiden Gerade CE und DF parallel sind,



und von der dritten AB durchschnitten werden; so folgt aus dem vorhergehenden Paragraphe, daß die homologen Winkel α und β einander gleich seien. Bezeichnet man den Nebenwinkel ABF von β mit γ; so ist $\beta + \gamma = \pi$, also auch

$$\alpha + \gamma = \pi,$$

d. h. bei Parallelen ist die Summe der beiden inneren Winkel gleich zwei rechten. Ebenso ist die Summe der beiden äußeren Winkel CAB und DBA gleich zwei rechten. Auch findet man leicht, daß je zwei Wechselwinkel, wie EAB und ABD oder ABF und CAB einander gleich sind.

Wenn sich zwei Paare von Parallelen, wie CA, DB und AB, CD in den Punkten A, B, D, C gegenseitig durchschneiden; so geht aus den obigen Sätzen hervor, daß in dem Vierecke ABDC je zwei einander gegenüberstehende Winkel β, β_1 und γ, γ_1 gleich groß seien: denn wegen des Parallelismus der bei-

den Linien CA und DB hat man $\gamma+\beta=\pi$ und wegen des Parallelismus der beiden Linien AB und CD auch $\gamma+\beta_1=\pi$ oder $\beta+\gamma_1=\pi$; mithin sowol $\beta=\beta_1$, wie $\gamma=\gamma_1$, und demnach folgt aus §. 76, daß jenes Viereck ABDC ein Parallelogramm sei, in welchem AB = CD und CA = DB ist.

Nimmt man die beiden Parallelen CE und DF so, daß $<\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$ oder gleich einem rechten ist; so wird das Parallelogramm ABDC zu einem Rechtecke, und hieraus folgt, daß zwei Parallelen überall denselben Abstand voneinander besitzen.

Von dem letzteren Satze ist auch der umgekehrte richtig, d. h. wenn sich zwei Paare von Linien, CA, DB und AB, CD so durchschneiden, daß in dem durch ihre Durchschnittspunkte bestimmten Vierecke ABDC je zwei einander gegenüberliegende Winkel β, β_1 und γ, γ_1 gleich sind; so sind jene Linien paarweise parallel, oder in einem jeden Parallelogramme sind die einander gegenüberliegenden Seiten parallel. Denn wenn $\beta=\beta_1$ und $\gamma=\gamma_1$; so hat man, da $\beta+\gamma+\beta_1+\gamma_1=2\pi$ ist, $\beta+\gamma=\pi$, wodurch der Parallelismus der beiden Linien CA und DB begründet ist. Da nun auch $\beta+\gamma=\beta_1+\gamma=\pi$ ist; so folgt, daß auch die beiden anderen Linien AB und CD einander parallel sind.

Analytische Darstellung eines stetigen linearen Zuges durch Koordinaten.

§. 79. Um uns von der örtlichen Lage und den sonstigen Eigenthümlichkeiten irgend eines gerad- oder krummlinigen Zuges auf geometrischem Wege eine genügende Vorstellung zu machen, denken wir uns denselben im Akte seiner Entstehung, wie er durch die stetige Bewegung eines Punktes beschrieben wird, verfolgen diesen erzeugenden Punkt in seiner Bahn, und indem wir dessen sukzessive Lagen mit anderen als fest angenommenen Örtern vergleichen, beobachten wir das Bildungsgesetz, nach welchem sich der fragliche Zug im Raume erzeugt.

Mit Hülfe des vorstehenden Verfahrens erhalten wir ein geometrisches Bild jenes Zuges; der Letztere stellt sich unserem

sinnlichen Anschauungsvermögen so dar, wie er in der Wirklichkeit existirt. Wollen wir nun die Beziehungen, in welchen die verschiedenen Lagen des beschreibenden Punktes zu anderen festen Punkten und Linien stehen, auf abstrakte Begriffe bringen oder das Bildungsprinzip des Zuges begriffsmäßig darstellen; so geschieht Dies durch analytische Formeln, welche vermöge der ihnen zu Grunde liegenden räumlichen Beziehungen die sukzessiven Lagen des obigen Punktes bezeichnen. Da der Zug selbst unendlich viele Punkte enthält; so müßten auch unendlich viele analytische Ausdrücke gegeben werden, um denselben in seiner ganzen Ausdehnung darzustellen: ein jeder besondere Ausdruck würde alsdann einen besonderen Punkt des Zuges bezeichnen. Man erkennt, daß eine solche Darstellungsweise eines stetigen Zuges durchaus nicht den Charakter eines *Gesetzes* oder einer allgemeinen Vorschrift an sich trägt, nach welcher sich alle jene einzelnen Ausdrücke allmählig in ähnlicher Weise erzeugen lassen, wie der Zug selbst durch die geometrische Ortsveränderung des beschreibenden Punktes erzeugt wurde. Um nun das zuletzt erwähnte stetige Bildungsgesetz analytisch auszudrücken, stellt man für irgend einen in Ein und derselben Ebene liegenden Zug den *Vektorradius*, sowol seiner *absoluten Länge* von einem angenommenen *Nullpunkte*, wie seiner *Richtung* gegen eine feste *Axe* nach, durch eine allgemeine Formel dar, indem man in derselben diejenigen Größen oder *Koordinaten* unbestimmt läßt, von welchen der besondere Werth des Vektors abhängen würde, sobald man denselben auf einen einzelnen bestimmten Punkt des Zuges beziehen wollte. Wenn man hierauf jene unbestimmten Koordination stetig *variiren* läßt oder für diese Größen, welche unter der vorstehenden Bedeutung den Charakter der Veränderlichkeit annehmen, nach und nach Werthe substituirt, welche um beliebig kleine Unterschiede voneinander abstehen; so erhält man aus der allgemeinen Formel ebenso viel Werthe für Vektorradien von Punkten des fraglichen Zuges, welche sukzessive in der Richtung des Zuges aufeinander folgen, und deren Aneinanderreihung die Vorstellung von der stetigen Bewegung des den Zug erzeugenden Punktes erweckt.

Nimmt man nun behuf analytischer Darstellung des Bildungsgesetzes oder der *Gleichung* irgend eines ebenen Zuges

in der Ebene desſelben einen feſten Punkt als Nullpunkt und eine durch denſelben gehende gerade Linie als reelle Axe an; ſo kann die Lage irgend eines Punktes jener Ebene oder deſſen Vektorradius in Beziehung zu dem gegebenen Nullpunkte und der reellen Axe nach den Betrachtungen des zweiten Abſchnittes entweder durch einen Ausdruck von der Form

$$(\varrho) = (-)^{m}\varrho = e^{\varphi\sqrt{-1}}\,\varrho \qquad \ldots\ldots (62)$$

oder durch einen Ausdruck von der Form

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}) \qquad \ldots\ldots (63)$$

dargeſtellt werden. In dieſen Formeln bezeichnet (ϱ) den Vektor, ſobald er ſowol ſeiner abſoluten Länge, wie ſeiner Richtung nach betrachtet wird; $m\pi = \varphi$ iſt der Neigungswinkel desſelben gegen die poſitive reelle Axe, ϱ iſt die abſolute Länge desſelben, und in der Gleichung (63) ſtellt $x = \varrho\cos\varphi$ ein Stück der (poſitiven oder negativen) reellen Axe dar, um welches man vom Nullpunkte aus fortſchreiten muß, um alsdann durch ein rechtwinkliges Abſpringen von dieſer Axe um die Länge $y = \varrho\sin\varphi$ in der Richtung der (poſitiven oder negativen) imaginären Axe in den fraglichen Punkt zu gelangen.

Die Formel (62) ſtellt die Gleichung eines Zuges zwiſchen den Polarkoordinaten $m\pi$ oder φ und ϱ dar.

Die Formel (63) iſt die Gleichung desſelben zwiſchen den rechtwinkligen Koordinaten x und y, von denen die erſtere die Abſziſſe und die letztere die Ordinate irgend eines Punktes des Zuges heißt.

Wenn man in den vorſtehenden Gleichungen entweder die beiden Größen φ und ϱ, oder die beiden Größen x und y variiren läßt, wird man vermittelſt derſelben die Lagen eines jeden beliebigen Punktes der Koordinatenebene darſtellen können. Soll durch dieſelben aber eine beſtimmte Reihenfolge von Punkten oder ein beſtimmter Zug geſetzmäßig dargeſtellt werden; ſo leuchtet ein, daß man jene beiden Größen nicht gleichzeitig willkürlich variiren laſſen darf. Die Veränderung der Einen muß vielmehr durch die der anderen auf eine beſtimmte Weiſe bedingt ſein, beide Größen müſſen alſo durch irgend eine gegebene Beziehung voneinander abhängig oder die Eine muß eine Funktion

der anderen ſein. Damit alſo jene Formeln die Gleichungen irgend eines gegebenen ſtetigen Zuges werden, muß man für die erſte allgemein

$$\varrho = \Phi(m\pi) = \Phi(\varphi) \qquad \ldots\ldots(64)$$

oder für die zweite

$$y = F(x) \qquad \ldots\ldots(65)$$

haben, wodurch ſich dieſelben in

$$(\varrho) = (-)^m \Phi(m\pi) = e^{\varphi\sqrt{-1}}\,\Phi(\varphi) \qquad \ldots\ldots(66)$$

oder in

$$(\varrho) = x + F(x).\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(67)$$

verwandeln. Die Formel (66) zwiſchen den Polarkoordinaten φ und ϱ kann auch in die Form einer Gleichung zwiſchen rechtwinkligen Koordinaten gebracht werden, wenn man den Richtungskoeffizienten $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}$, alſo

$$(\varrho) = \Phi(\varphi).(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}) \qquad \ldots\ldots(68)$$

ſetzt.

Läßt man in dieſen Gleichungen reſp. die unabhängig veränderliche Größe φ oder x ſtetig variiren; ſo wird man durch dieſelben eine Reihe von ſtetig aufeinander folgenden Punkten des fraglichen Zuges darzuſtellen im Stande ſein.

Koordinatenverwandelung.

§. 80. Übergang aus einem Syſteme von rechtwinkligen Koordinaten zu einem Syſteme von Polarkoordinaten.

Zuweilen wird es nothwendig, ſtetige lineare Züge oder Kurven, deren Bildungsgeſetz vermittelſt irgend eines Syſtemes von Koordinaten gegeben iſt, durch ein anderes Syſtem darzuſtellen, deſſen Koordinaten zu den erſteren in einer beſtimmten Beziehung ſtehen. Wir werden daher in den zunächſt folgenden Paragraphen einige allgemeine Sätze vorausſchicken, mit Hülfe

deren man die Gleichung irgend einer ebenen Kurve für ein verändertes Koordinatenſyſtem erhält, und demgemäß zuvörderſt den Fall betrachten, wo die Gleichung irgend einer Kurve durch rechtwinklige Koordinaten x und y, alſo in der Form

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (69)$$

worin

$$y = F(x) \qquad \ldots\ldots (70)$$

iſt, gegeben iſt, und wo verlangt wird, die Gleichung derſelben Kurve zwiſchen Polarkoordinaten φ und ϱ, alſo in der Form

$$(\varrho) = e^{\varphi\sqrt{-1}}\varrho = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}), \qquad \ldots\ldots (71)$$

worin

$$\varrho = \Phi(\varphi) \qquad \ldots\ldots (72)$$

iſt, darzuſtellen, indem man bei dieſem neuen Syſteme ſowol den Anfangspunkt der Koordinaten, wie die Richtung der reellen Axe beibehält.

Setzt man zu dieſem Ende wegen der Gleichungen (69), (70) und (71)

$$\left.\begin{aligned} \varrho\cos\varphi &= x, \\ \varrho\sin\varphi &= y = F(x), \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (73)$$

eliminirt zwiſchen dieſen beiden Gleichungen die Größe x, und löſ't die Endgleichung für ϱ auf; ſo ergibt ſich der Vektor ϱ als eine Funktion von φ in der Form der Gleichung (72). Dieſer Werth für ϱ, in Gleichung (71) ſubſtituirt, führt zu der geſuchten Gleichung zwiſchen den Polarkoordinaten.

§. 81. Übergang aus einem Syſteme von Polarkoordinaten zu einem Syſteme von rechtwinkligen Koordinaten.

Hier iſt die Gleichung

$$(\varrho) = e^{\varphi\sqrt{-1}}\varrho = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}), \qquad \ldots\ldots (74)$$

worin

$$\varrho = \Phi(\varphi) \qquad \ldots\ldots (75)$$

ist, gegeben, und die Gleichung

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1}, \qquad \ldots\ldots (76)$$

worin

$$y = F(x) \qquad \ldots\ldots (77)$$

ist, gesucht; dabei wird vorausgesetzt, daß für das neue System sowol der Anfangspunkt der Koordinaten, wie die Richtung der reellen Axe unverändert bleiben.

Setzt man daher wegen der Gleichungen (74), (75) und (76)

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi = \Phi(\varphi).\cos\varphi, \\ y &= \varrho\sin\varphi = \Phi(\varphi).\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (78)$$

eliminirt zwischen diesen beiden Gleichungen die Größe φ, und löst die Endgleichung für y auf; so ergibt sich y als Funktion von x in der Form Gleichung (77). Substituirt man alsdann diesen Werth von y in Gleichung (76); so erhält man die verlangte Gleichung der Kurve zwischen rechtwinkligen Koordinaten.

§. 82. Übergang aus einem Systeme von rechtwinkligen Koordinaten zu einem anderen gleichnamigen Systeme, in welchem der Anfangspunkt verändert, die Richtung der reellen Axe aber beibehalten ist.

Der Vektorradius irgend eines Punktes M der Kurve AMB sei in Beziehung zu der positiven reellen Axe OX und zu der positiven imaginären Axe OY durch die Formel

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1}, \qquad \ldots\ldots (79)$$

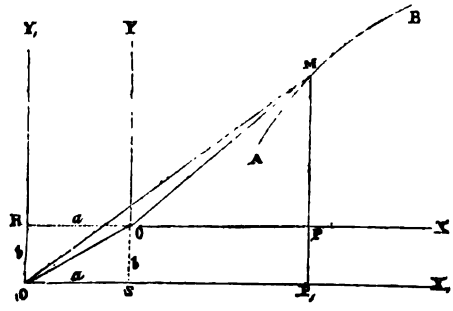
worin

$$y = F(x) \qquad \ldots\ldots (80)$$

ist, dargestellt. Es wird verlangt, die allgemeine Gleichung für diesen Vektor anzugeben, wenn unter Beibehaltung der Richtungen der obigen Axen, der Anfangspunkt O des Koordinatensystemes um die Länge $OR = a$ rückwärts, also nach der negativen Seite der reellen Axe, und auch in der Richtung der imagi-

nären Axe um die Länge $RO_1 = b$ rückwärts, alſo nach der negativen Seite dieſer Axe verlegt werde.

Bezeichnet man den Vektor (O_1M) des Punktes M für das neue Syſtem mit (ϱ_1), die neue Abſziſſe und Ordinate O_1P_1



und MP_1 reſp. mit x_1 und y_1; ſo wird die geſuchte Gleichung der Kurve AB die Form

$$(\varrho_1) = x_1 + y_1\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(81)$$

haben, worin die Abhängigkeit der Größe y_1 von x_1 allgemein durch

$$y_1 = F_1(x_1) \qquad \ldots\ldots(82)$$

angedeutet wird. Es kommt jetzt bloß darauf an, vermittelſt der Gleichungen (79) und (80) die Natur der Funktion (82) herzuſtellen.

Denkt man ſich zu dieſem Ende die Linie O_1O gezogen; ſo bildet der arithmetiſche Werth des neuen Vektors $(O_1M)=(\varrho_1)$ die Summe der Linie (O_1O) und des alten Vektors $(OM)=(\varrho)$; man hat alſo

$$(O_1M) = (O_1O) + (OM),$$

d. i., da $(O_1O)=a+b\sqrt{-1}$ und $(OM)=(\varrho)=x+y\sqrt{-1}$ iſt,

$$(\varrho_1) = a+b\sqrt{-1}+x+y\sqrt{-1} \text{ oder}$$

$$(\varrho_1) = x+a+(y+b)\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(83)$$

Setzt man dieſen Werth von (ϱ_1) dem obigen aus Glei-

chung (81) gleich, indem man ſowol die reellen, wie die imaginären Glieder gegeneinander ausgleicht; ſo ergeben ſich unter Berückſichtigung der Beziehung (80) die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x+a&=x_1\\ \mathrm{F}(x)+b&=y_1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(84)$$

Eliminirt man zwiſchen dieſen beiden Gleichungen die Größe x, und löſ't die Endgleichung für y_1 auf; ſo findet man für die geſuchte Funktion (82)

$$y_1=\mathrm{F}_1(x_1)=b+\mathrm{F}(x_1-a) \quad \ldots\ldots(85)$$

Dieſer Werth für y_1, in Gleichung (81) ſubſtituirt, ergibt für die Gleichung der Kurve in Beziehung zu der neuen Axe

$$(\varrho_1)=x_1+[b+\mathrm{F}(x_1-a)]\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(86)$$

Wenn der Anfangspunkt O nach der poſitiven Seite der reellen oder der imaginären Axe verlegt werden ſollte; ſo würde man in den vorſtehenden Gleichungen reſp. $-a$ ſtatt a oder $-b$ ſtatt b zu ſetzen haben.

§. 83. Übergang aus einem Syſteme von rechtwinkligen Koordinaten zu einem anderen gleichnamigen Syſteme, in welchem der Anfangspunkt beibehalten, die Richtung der reellen Axe aber verändert iſt.

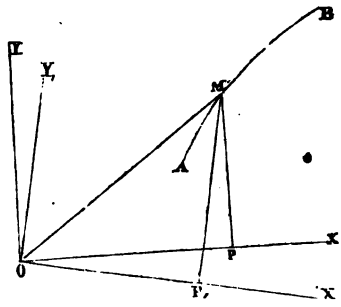
Die Gleichung der Kurve AMB ſei für die Axe OX in der Form

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}, \quad \ldots\ldots(87)$$

worin

$$y=\mathrm{F}(x) \quad \ldots\ldots(88)$$

iſt, gegeben; es werde die Gleichung dieſer Kurve für die Lage OX_1 der poſitiven reellen Axe, alſo für die Koordinaten $\mathrm{OP}_1=x_1$ und $\mathrm{MP}_1=y_1$, unter der Vorausſetzung verlangt, daß die neue Axe mit der früheren den nach der negativen Seite der letzteren liegenden Winkel $\mathrm{X}_1\mathrm{OX}=\psi$ einſchließe.



Um dieſe neue Gleichung in der Form

$$(\varrho_1) = x_1 + y_1\sqrt{-1}, \qquad \ldots\ldots(89)$$

worin

$$y_1 = F_1(x_1) \qquad \ldots\ldots(90)$$

iſt, herzuſtellen, ſo bemerkt man, daß der obigen Veränderung der reellen Axe eine Drehung der ganzen Figur AMB um den Punkt O in entgegengeſetzter Richtung, alſo in der poſitiven Richtung von X nach Y herüber, um den Winkel ψ entſpricht, wenn man dabei die anfängliche reelle Axe als unverändert anſieht. Hieraus folgt, daß die neuen Werthe (ϱ_1) der Vektoren für die verſchiedenen Punkte M der gegebenen Kurve durch eine einfache Multiplikation der Gleichung (87) mit dem Richtungskoeffizienten $e^{\psi\sqrt{-1}} = \cos\psi + \sin\psi.\sqrt{-1}$ erhalten werden, oder daß

$$(\varrho_1) = (x + y\sqrt{-1})(\cos\psi + \sin\psi.\sqrt{-1})$$

d. i.

$$(\varrho_1) = x\cos\psi - y\sin\psi + (x\sin\psi + y\cos\psi)\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(91)$$

iſt. Setzt man dieſen Werth von (ϱ_1) gleich dem aus Gleichung (89); ſo ergeben ſich die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x\cos\psi - y\sin\psi &= x_1, \\ x\sin\psi + y\cos\psi &= y_1, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(92)$$

oder wenn man für y ſeinen Werth aus Gleichung (88) einführt,

$$\left.\begin{aligned} x\cos\psi - F(x).\sin\psi &= x_1, \\ x\sin\psi + F(x).\cos\psi &= y_1. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(93)$$

Eliminirt man zwiſchen dieſen beiden Gleichungen die Größe x, und löſ't die reſultirende Gleichung für y_1 auf; ſo erhält man y_1 als Funktion von x_1 oder die Gleichung (90), und demnach auch durch Subſtitution die geſuchte Gleichung (89).

Sollte die Koordinatenveränderung in der Weiſe vor ſich gehen, daß der Winkel $X_1OX=\psi$ von X nach Y herüber beſchrieben würde; ſo hätte man die Gleichung (87) mit dem Richtungskoeffizienten $e^{-\psi\sqrt{-1}}=\cos\psi-\sin\psi.\sqrt{-1}$ multipliziren oder $-\psi$ an die Stelle von $+\psi$ ſetzen müſſen, wodurch nur die in $\sin\psi$ multiplizirten Glieder der vorſtehenden Gleichungen ihre Zeichen ändern. Der abſolute Werth von ψ wird hierbei den Werth π nicht überſteigen können. Läßt man jedoch auch größere Werthe für ψ zu, welche in dem 3ten und 4ten Quadranten liegen; ſo kann man eine jede Lage der Axe OX_1, als durch eine Drehung nach der unteren Seite entſtanden anſehen und die obigen Formeln ohne Weiteres beibehalten.

§. 84. Übergang aus einem Syſteme von rechtwinkligen Koordinaten zu einem anderen gleichnamigen Syſteme, in welchem gleichzeitig der Anfangspunkt ſeine Lage, wie in §. 82, und die reelle Axe ihre Richtung, wie in §. 83, geändert haben.

Die Kurve ſei auch hier wieder durch die Gleichung

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}, \qquad \ldots.(94)$$

worin

$$y=F(x) \qquad \ldots.(95)$$

iſt, gegeben. Bezeichnet man die neuen Koordinaten O_1P_1 und MP_1 des Punktes M der Kurve reſp. mit x_1, y_1; ſo wird die Gleichung der Kurve unter der Form

$$(\varrho_1)=x_1+y_1\sqrt{-1}, \qquad \ldots.(96)$$

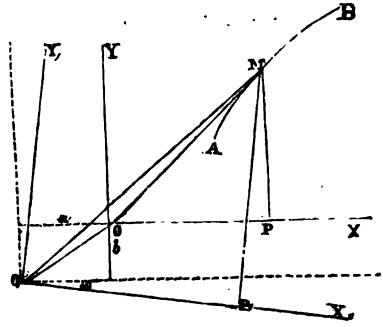
worin

$$y_1=F_1(x_1) \qquad \ldots.(97)$$

iſt, geſucht.

Geht man zuvörderſt aus dem urſprünglichen Koordinatenſyſteme nach §. 82 in ein anderes über, in welchem nur der An-

fangspunkt O nach O_1 verrückt, die Richtung der reellen Axe aber beibehalten ist; so bildet der neue Vektor (O_1M) irgend



eines Punktes der Kurve die arithmetische Summe der Linie $(O_1O) = a + b\sqrt{-1}$ und des ursprünglichen Vektors $(OM) = (\varrho) = x + y\sqrt{-1}$. Jener Vektor ist demnach

$$a + b\sqrt{-1} + x + y\sqrt{-1} = (x+a) + (y+b)\sqrt{-1}.$$

Nimmt man jetzt die Drehung der reellen Axe um den Winkel ψ nach der negativen Seite herum vor, was nach §. 83 einer Drehung der gegebenen Kurve nach der entgegengesetzten Seite um denselben Winkel ψ und demnach einer Multiplikation des vorstehenden Werthes für den zuletzt erwähnten Vektor mit dem Richtungskoeffizienten $e^{\psi\sqrt{-1}} = \cos\psi + \sin\psi.\sqrt{-1}$ entspricht; so erhält man für den Vektor des Punktes M in Beziehung zu dem neuen Koordinatensysteme

$$(\varrho_1) = [(x+a) + (y+b)\sqrt{-1}](\cos\psi + \sin\psi.\sqrt{-1})$$

d. i.

$$(\varrho_1) = (x+a)\cos\psi - (y+b)\sin\psi + [(x+a)\sin\psi + (y+b)\cos\psi]\sqrt{-1} \ldots (98)$$

Gleicht man diesen Werth für (ϱ_1) mit dem der Gleichung (96) aus; so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(x+a)\cos\psi - (y+b)\sin\psi &= x_1,\\ (x+a)\sin\psi + (y+b)\cos\psi &= y_1,\end{aligned}\right\} \quad \ldots . (99)$$

oder wenn man für y seinen Werth aus Gleichung (95) substituirt,

$$\left.\begin{aligned}(x+a)\cos\psi - (F(x)+b)\sin\psi &= x_1,\\ (x+a)\sin\psi + (F(x)+b)\cos\psi &= y_1.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (100)$$

Eliminirt man aus dieſen beiden Gleichungen die Größe x, und löſ't die ſich ergebende Gleichung für y_1 auf; ſo erhält man die geſuchte Funktion (97), welche, wenn dieſelbe in Gleichung (96) eingeführt wird, die verlangte Gleichung der Kurve AB liefert.

Wenn die Verrückung des Anfangspunktes O und die Drehung der reellen Axe OX nach Seiten erfolgt, welche den hier angenommenen gerade entgegengeſetzt ſind; ſo nehmen reſp. die Größen a, b, ψ entgegengeſetzte Zeichen an.

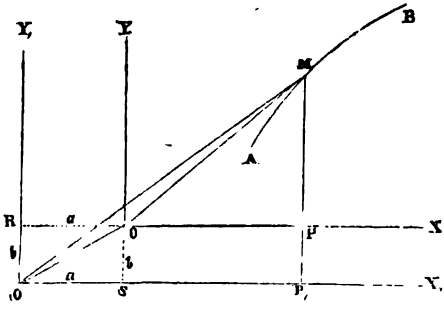
§. 85. Übergang aus einem Syſteme von Polarkoordinaten zu einem anderen gleichnamigen Syſteme, in welchem der Anfangspunkt verändert, die Richtung der reellen Axe aber beibehalten iſt.

Die gegebene Gleichung der Kurve AMB in Beziehung zu der Axe OX wird hier

$$(\varrho) = e^{\varphi\sqrt{-1}}\varrho = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\,.\,\sqrt{-1}) \quad \ldots\ldots (101)$$

ſein, worin

$$\varrho = \Phi(\varphi) \quad \ldots\ldots (102)$$



iſt. Bezeichnet man nun den neuen Vektor O_1M mit ϱ_1 und den Winkel MO_1X_1 mit φ_1; ſo beſteht die vorliegende Aufgabe darin, die Gleichung

$$(\varrho_1) = e^{\varphi_1\sqrt{-1}}\varrho_1 = \varrho_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 . \sqrt{-1}), \quad \ldots\ldots(103)$$

worin

$$\varrho_1 = \Phi_1(\varphi_1) \quad \ldots\ldots(104)$$

ist, für die Kurve AMB herzustellen.

Bezeichnet man den Winkel OO_1X_1, welchen die von dem früheren Anfangspunkte O nach dem neuen Anfangspunkte O_1 gezogene Linie mit der neuen Axe O_1X_1 bildet, mit γ und die absolute Länge dieser Linie mit c; so wird der neue Vektor $(O_1M) = \varrho_1$ die arithmetische Summe der Linie $(O_1O) = c(\cos\gamma + \sin\gamma . \sqrt{-1})$ und des früheren Vektors $(OM) = (\varrho) = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi, \sqrt{-1})$ darstellen, d. h. man wird

$$(\varrho_1) = c(\cos\gamma + \sin\gamma . \sqrt{-1}) + \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) \text{ oder}$$

$$(\varrho_1) = \varrho\cos\varphi + c\cos\gamma + (\varrho\sin\varphi + c\sin\gamma)\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(105)$$

haben. Setzt man diesen Werth von (ϱ_1) gleich dem aus Gleichung (103); so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho\cos\varphi + c\cos\gamma &= \varrho_1\cos\varphi_1, \\ \varrho\sin\varphi + c\sin\gamma &= \varrho_1\sin\varphi_1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(106)$$

oder wenn man für ϱ seinen Werth aus Gleichung (102) substituirt,

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\varphi).\cos\varphi + c\cos\gamma &= \varrho_1\cos\varphi_1, \\ \Phi(\varphi).\sin\varphi + c\sin\gamma &= \varrho_1\sin\varphi_1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(107)$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Größe φ, und löst die Endgleichung für ϱ_1 auf; so erhält man ϱ_1 als Funktion von φ_1 oder die gesuchte Funktion (104), welche, in Gleichung (103) substituirt, die Gleichung der Kurve für das neue Koordinatensystem ergibt.

Um die ebenbemerkte Elimination auszuführen, kann man zuweilen so verfahren, daß man zuvörderst eine jede der Gleichungen (107) quadrirt, und alsdann beide addirt; Dies ergibt

$$\varrho_1 = \sqrt{[\Phi(\varphi).\cos\varphi + c\cos\gamma]^2 + [\Phi(\varphi).\sin\varphi + c\sin\gamma]^2}$$

oder

$$\varrho_1 = \sqrt{[\Phi(\varphi)]^2 + c^2 + 2c\,\Phi(\varphi).\cos(\varphi - \gamma)} \quad \ldots\ldots(108)$$

Eine Division der beiden Gleichungen (107) durch einander ergibt ferner

$$\frac{\Phi(\varphi).\sin\varphi + c\sin\gamma}{\Phi(\varphi).\cos\varphi + c\cos\gamma} = \operatorname{tang}\varphi_1 \qquad \ldots.(109)$$

Entwickelt man nun aus der letzteren Gleichung den Werth von φ als Funktion von φ_1 und substituirt denselben in Gleichung (108); so hat man die verlangte Funktion (104). Zum Behuf der letzteren Entwickelung von φ aus Gleichung (109) kann man diese Gleichung in vielen Fällen (nach geschehener Multiplikation mit dem Nenner $\Phi(\varphi)\cos\varphi + c\cos\gamma$) sehr zweckmäßig in die Form

$$\Phi(\varphi).\sin\varphi - \Phi(\varphi).\cos\varphi.\operatorname{tang}\varphi_1 = c\cos\gamma.\operatorname{tang}\varphi_1 - c\sin\gamma$$

oder

$$\Phi(\varphi).\sin(\varphi - \varphi_1) = c\sin(\varphi_1 - \gamma) \qquad \ldots.(110)$$

bringen, wodurch man häufig eine bequeme Reduktion bewirkt.

Es wird noch bemerkt, daß jenachdem der Winkel γ im 1sten, 2ten, 3ten oder 4ten Quadranten liegt, die Zeichen von $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ sich gerade so ändern, wie sich in §. 82 die Zeichen von a und b änderten, jenachdem der neue Anfangspunkt in den Richtungen der positiven reellen oder positiven imaginären Axe rückwärts oder vorwärts verlegt war.

§. 86. Übergang aus einem Systeme von Polarkoordinaten zu einem anderen gleichnamigen Systeme, in welchem der Anfangspunkt beibehalten, die Richtung der reellen Axe aber verändert wird.

Wenn für diesen Fall die Gleichung

$$(\varrho) = e^{\varphi\sqrt{-1}}\varrho = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}), \qquad \ldots.(111)$$

worin

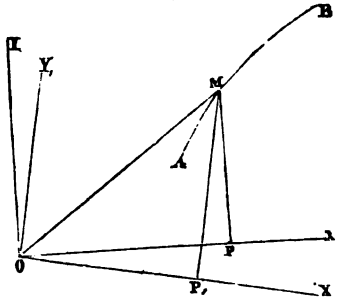
$$\varrho = \Phi(\varphi) \ldots.(112)$$

ist, gegeben und die Gleichung

$$(\varrho_1) = e^{\varphi_1\sqrt{-1}}\varrho_1 = \varrho_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1.\sqrt{-1}), \qquad \ldots.(113)$$

worin

$$\varrho_1 = \Phi_1(\varphi_1) \qquad \ldots.(114)$$



sein muß, gesucht ist; so findet man durch eine ganz ähnliche Betrachtung, wie in §. 83, daß wenn die neue Axe OX_1 mit der früheren den Winkel $XOX_1 = \psi$ einschließen soll, der neue Vektor (ϱ_1) durch eine Multiplikation des früheren $(\varrho) = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})$ mit dem Richtungskoeffizienten $e^{\psi\sqrt{-1}} = \cos\psi + \sin\psi . \sqrt{-1}$ erhalten wird. Dies ergibt

$$(\varrho_1) = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})(\cos\psi + \sin\psi . \sqrt{-1}) \text{ oder}$$

$$(\varrho_1) = \varrho[\cos(\varphi+\psi) + \sin(\varphi+\psi).\sqrt{-1}) \qquad \ldots\ldots(115)$$

Setzt man diesen Werth von (ϱ_1) dem obigen aus Gleichung (113) gleich; so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho\cos(\varphi+\psi) &= \varrho_1\cos\varphi_1, \\ \varrho\sin(\varphi+\psi) &= \varrho_1\sin\varphi_1, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(116)$$

oder wegen Gleichung (112)

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\varphi).\cos(\varphi+\psi) &= \varrho_1\cos\varphi_1, \\ \Phi(\varphi).\sin(\varphi+\psi) &= \varrho_1\sin\varphi_1. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(117).$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Größe φ; so ergibt eine Auflösung der Endgleichung für ϱ_1 die gesuchte Funktion (114). Dividirt man zu diesem Ende die beiden Gleichungen (117) durch einander; so kommt

$$\text{tang}(\varphi+\psi) = \text{tang}\varphi_1, \text{ also}$$

$$\varphi + \psi = \varphi_1 \text{ oder}$$

$$\varphi = \varphi_1 - \psi, \qquad \ldots\ldots(118)$$

und durch eine Substitution dieses Werthes von φ in Eine jener beiden Gleichungen

$$\varrho_1 = \Phi(\varphi_1 - \psi), \qquad \ldots\ldots(119)$$

worin die gesuchte Funktion (114) besteht, ein Resultat, welches

man auf kürzerem Wege unmittelbar aus der Auſchauung der Figur hätte herſtellen können. Die Gleichung (113) der Kurve für das neue Koordinatenſyſtem wird hiernach

$$(\varrho_1)=e^{\varphi_1\sqrt{-1}}\Phi(\varphi_1-\psi)\Phi=(\varphi_1-\psi).(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1.\sqrt{-1})\ldots(120)$$

Wenn die Drehung der reellen Axe um den Winkel ψ von X nach Y herüber geſchehen ſoll; ſo hat man den Winkel ψ, welcher alsdann den abſoluten Werth π nicht überſchreiten kann, in den vorſtehenden Formeln mit entgegengeſetztem Zeichen zu nehmen. Läßt man jedoch für ψ Werthe zu, welche $>\pi$ ſind; ſo kann man die obigen Formeln für alle Fälle beibehalten, wofern man nur den Winkel ψ nach einer Drehung in der hier angenommenen Richtung von Y über X herum ſchäzt.

§. 87. Übergang aus einem Syſteme von Polarkoordinaten zu einem anderen gleichnamigen Syſteme, in welchem gleichzeitig der Anfangspunkt ſeine Lage, wie in §. 85., und die reelle Axe ihre Richtung, wie in §. 86. geändert haben.

Für die gegebene Gleichung der Kurve hat man auch hier

$$(\varrho)=e^{\varphi\sqrt{-1}}\varrho=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1}),\qquad\ldots.(121)$$

worin

$$\varrho=\Phi(\varphi)\qquad\ldots.(122)$$

iſt, und für die geſuchte Gleichung

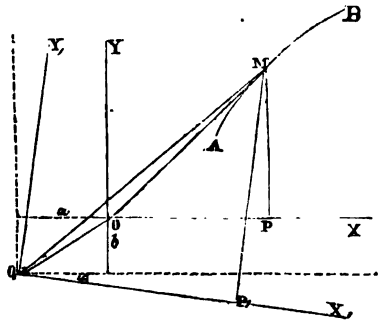
$$(\varrho_1)=e^{\varphi_1\sqrt{-1}}\varrho_1=\varrho_1(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1.\sqrt{-1}),\qquad\ldots.(123)$$

worin

$$\varrho_1=\Phi_1(\varphi_1)\qquad\ldots.(124)$$

ſein muß.

Wie in §. 84 gezeigt iſt, entſpricht die bloße Verlegung des Anfangspunktes O nach O_1 unter Beibehaltung der Richtung der reellen Axe einer Addition des Werthes $(O_1O)=c(\cos\gamma+\sin\gamma.\sqrt{-1})$ zu dem Vektor $(OM)=(\varrho)=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$, und die alsdann erfolgende Drehung der reellen Axe einer Multiplikation



der vorstehend erwähnten Summe mit dem Richtungskoeffizienten $e^{\psi\sqrt{-1}} = \cos\psi + \sin\psi.\sqrt{-1}$. Man erhält also

$$(\varrho_1)=[\varrho\cos\varphi+c\cos\gamma+(\varrho\sin\varphi+c\sin\gamma)\sqrt{-1}](\cos\psi+\sin\psi.\sqrt{-1})$$
$$= (\varrho\cos\varphi + c\cos\gamma)\cos\psi - (\varrho\sin\varphi + c\sin\gamma)\sin\psi$$
$$+ [(\varrho\cos\varphi + c\cos\gamma)\sin\psi + (\varrho\sin\varphi + c\sin\gamma)\cos\psi]\sqrt{-1}$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$(\varrho_1) = \varrho\cos(\varphi+\psi)+c\cos(\gamma+\psi)+[\varrho\sin(\varphi+\psi)+c\sin(\gamma+\psi)]\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(125)$$

Setzt man diesen Werth von (ϱ_1) gleich dem aus Gleichung (123); so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\varrho\cos(\varphi+\psi)+c\cos(\gamma+\psi) &= \varrho_1\cos\varphi_1,\\ \varrho\sin(\varphi+\psi)+c\sin(\gamma+\psi) &= \varrho_1\sin\varphi_1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(126)$$

oder wenn man für ϱ seinen Werth aus Gleichung (122) einführt,

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\varphi).\cos(\varphi+\psi)+c\cos(\gamma+\psi) &= \varrho_1\cos\varphi_1,\\ \Phi(\varphi).\sin(\varphi+\psi)+c\sin(\gamma+\psi) &= \varrho_1\sin\varphi_1.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(127)$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Größe φ; so ergibt eine Auflösung der Endgleichung für ϱ_1 die gesuchte Funktion (124) und demnach auch die Gleichung (123) der Kurve für das neue Koordinatensystem.

Man findet auch hier, wie in §. 85, daß

$$\varrho_1 = \sqrt{[\Phi(\varphi)]^2 + c^2 + 2c\Phi(\varphi).\cos(\varphi - \gamma)} \quad \ldots\ldots(128)$$

und daß

$$\frac{\Phi(\varphi).\sin(\varphi+\psi) + c\sin(\gamma+\psi)}{\Phi(\varphi).\cos(\varphi+\psi) + c\cos(\gamma+\psi)} = \operatorname{tang}\varphi_1 \quad \ldots\ldots(129)$$

oder

$$\Phi(\varphi).\sin(\varphi+\psi-\varphi_1) = c\sin(\varphi_1-\psi-\gamma) \quad \ldots\ldots(130)$$

ist, sodaß eine Auflösung der Gleichung (129) oder (130) für φ und eine demnächstige Substitution des gefundenen Werthes in Gleichung (128) die gesuchte Funktion (124) ergibt.

Hinsichtlich der Zeichenwechsel für die Größen γ und ψ siehe die §§. 85 und 86.

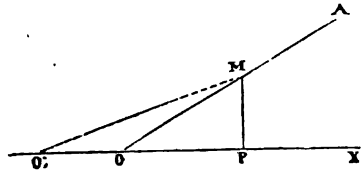
Die gerade Linie.

§. 88. Allgemeine Gleichung der geraden Linie.

Wenn die darzustellende gerade Linie OA durch den Nullpunkt des Koordinatensystemes geht; so ist ein von dem letzteren Punkte nach irgend einem anderen Punkte der geraden Linie gezogener Vektor der zwischen diesen beiden Punkten liegende Abschnitt der gegebenen Linie selbst, und es leuchtet ein, daß wenn man den Neigungswinkel dieser Linie gegen die positive reelle Axe mit α bezeichnet, die Gleichung derselben zwischen den Polarkoordinaten φ und ϱ

$$(\varrho) = (-)^m\varrho = e^{\alpha\nu\sqrt{-1}}\varrho = \varrho(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1}) \quad \ldots\ldots(131)$$

sein wird, in welcher α eine konstante unveränderliche Größe und ϱ die beliebig zu variirende Länge des Vektors für die verschiedenen Punkte der gegebenen Linie, welche hier von dem Winkel φ unabhängig ist, darstellt.



Will man die Gleichung der geraden Linie für rechtwinklige Koordinaten unter der Form

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(132)$$

herſtellen, worin y eine Funktion von x oder $= F(x)$ iſt; ſo hat man wegen Gleichung (131)

$$\varrho \cos \alpha = x \text{ und}$$
$$\varrho \sin \alpha = y = F(x)$$

zu ſetzen (ſ. §. 81). Eliminirt man zwiſchen dieſen Gleichungen die Veränderliche ϱ, indem man beachtet, daß α eine konſtante Größe darſtellt; ſo ergibt ſich

$$y = F(x) = x \operatorname{tang} \alpha \qquad \ldots\ldots(133)$$

Subſtituirt man dieſen Werth für y in die Formel (132); ſo erhält man für die Gleichung der geraden Linie OM

$$(\varrho) = x + x \operatorname{tang} \alpha \cdot \sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(134)$$

Fällt man von irgend einem Punkte M der gegebenen geraden Linie auf die reelle Axe OX des Perpendikel MP; ſo iſt

$$OM = \varrho,\ OP = x,\ MP = y = x \operatorname{tang} \alpha.$$

Aus dieſen Formeln folgt, daß zwiſchen der Ordinate y und der Abſziſſe x eines jeden Punktes der geraden Linie ein konſtantes Verhältniß

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \alpha$$

ſtattfindet.

Wenn man den Punkt O_1 als Nullpunkt des Koordinatenſyſtemes anſieht, und vorausſetzt, daß die obige gerade Linie die reelle Axe in dem Abſtande $O_1O = a$ vom Nullpunkte durchſchneide; ſo hat man für einen jeden Punkt M der geraden Linie, für welchen $O_1P = x$ und $MP = y = F(x)$ geſetzt wird,

$$\frac{y}{x-a} = \operatorname{tang} \alpha, \text{ alſo } y = F(x) = (x-a) \operatorname{tang} \alpha,$$

und demnach für die Gleichung dieſer geraden Linie nach (132)

$$(\varrho) = x + (x-a) \operatorname{tang} \alpha . \sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(135)$$

Wollte man dieſe gerade Linie durch Polarkoordinaten in der Form

$$(\varrho) = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) \qquad \ldots . (136)$$

darſtellen, worin $\varrho = O_1 M$, $\varphi = \angle M O_1 P$ und ϱ eine Funktion von φ iſt; ſo hätte man

$$x = \varrho\cos\varphi \text{ und}$$
$$(x-a)\operatorname{tang}\alpha = \varrho\sin\varphi$$

zu ſetzen (ſ. §. 80). Um nun ϱ als Funktion des Winkels φ zu beſtimmen, hat man zwiſchen dieſen beiden Gleichungen x zu eliminiren und die reſultirende Gleichung für ϱ aufzulöſen; Dies ergibt

$$\varrho = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha-\varphi)} \qquad \ldots . (137)$$

und demnach für die geſuchte Gleichung der geraden Linie OA, wenn O_1 als Nullpunkt angenommen wird,

$$(\varrho) = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha-\varphi)}(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) = e^{\varphi\sqrt{-1}} . \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha-\varphi)} \ldots . (138)$$

§. 89. Durchſchnitt zweier gerader Linien.

Zwei gerade Linien, welche die reelle Axe reſp. in den Abſtänden a und a_1 und unter den Winſeln φ und φ_1 durchſchneiden, ſind nach Gleichung (135) durch

$$(\varrho) = x + (x-a)\operatorname{tang}\alpha . \sqrt{-1} \qquad \ldots . (139)$$

und

$$(\varrho) = x + (x-a_1)\operatorname{tang}\alpha_1 . \sqrt{-1} \qquad \ldots . (140)$$

dargeſtellt.

Um die Koordinaten x_1 und y_1 für den gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkt dieſer beiden Linien zu beſtimmen, hat man die Werthe des Vektors (ϱ) aus den beiden Gleichungen (139) und (140) einander gleich zu ſetzen; der aus dieſer Bedingung für x ſich ergebende Werth entſpricht alsdann der Abſziſſe des fraglichen Durchſchnittspunktes, und wenn man denſelben in den

Ausdruck $y = F(x) = (x - a) \tang \alpha$ oder $= (x - a_1) \tang \alpha_1$ substituirt; so erhält man die zugehörige Ordinate. Gleicht man demnach die reellen und die imaginären Glieder der beiden Formeln. (139) und (140) gegeneinander aus; so ergibt eine Auflösung der durch die letzteren bestimmten Gleichung

$$x_1 = \frac{a \tang \alpha - a_1 \tang \alpha_1}{\tang \alpha - \tang \alpha_1} = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha_1 - a_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha}{\sin (\alpha - \alpha_1)}, \ldots (141)$$

und dieser Werth, in der Gleichung $y = F(x) = (x - a) \tang \alpha$ oder $(x - a_1) \tang \alpha_1$ gesetzt, gibt

$$y_1 = \frac{(a - a_1) \tang \alpha \tang \alpha_1}{\tang \alpha - \tang \alpha_1} = \frac{(a - a_1) \sin \alpha \sin \alpha_1}{\sin (\alpha - \alpha_1)} \quad \ldots . (142)$$

Da sich aus diesen Gleichungen für x_1 und y_1 nur ein einziger Werth ergibt; so folgt, daß sich zwei gerade Linien nur in Einem Punkte durchschneiden können.

Wenn $\alpha = \alpha_1$ ist; so wird $x_1 = \infty$ und $y = \infty$, d. h. die beiden gegebenen Linien sind einander parallel.

§. 90. Gleichung einer geraden Linie, welche durch einen bestimmten Punkt geht, und sich unter einem gegebenen Winkel gegen die positive reelle Axe neigt.

Wenn eine durch die Formel

$$(\varrho) = x + (x - a) \tang \alpha \,.\, \sqrt{-1} \quad \ldots . (143)$$

gegebene gerade Linie, welche sich unter dem Winkel α gegen die positive reelle Axe neigt, der Bedingung unterworfen ist, daß dieselbe durch einen Punkt der Koordinatenebene gehe, dessen Koordinaten x_1 und y_1, dessen Vektor also

$$(\varrho_1) = x_1 + y_1 \sqrt{-1} \quad \ldots . (144)$$

sei; so muß die Gleichung (143), wenn man darin $x = x_1$ setzt, mit der vorstehenden identisch werden. Demnach hat man zu setzen

$$x_1 + (x_1 - a) \tang \alpha \,.\, \sqrt{-1} = x_1 + y_1 \sqrt{-1},$$

woraus

$$a = \frac{x_1 \operatorname{tang} \alpha - y_1}{\operatorname{tang} \alpha} \qquad \ldots . (145)$$

folgt. Führt man diesen Werth für den Abstand a, in welchem die fragliche Linie die reelle Axe vom Nullpunkte aus durchschneidet, in die Formel (143) ein; so erhält man für die Gleichung jener Linie

$$(\varrho) = x + [(x - x_1) \operatorname{tang} \alpha + y_1] \sqrt{-1} \qquad \ldots . (146)$$

Will man diese Linie durch Polarkoordinaten in der Form

$$(\varrho) = \varrho(\cos \varphi + \sin \varphi . \sqrt{-1})$$

darstellen; so folgt zuvörderst als allgemeine Gleichung einer geraden Linie, welche sich unter dem Winkel α gegen die reelle Axe neigt, nach §. 88 Gleichung (138)

$$(\varrho) = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} (\cos \varphi + \sin \varphi . \sqrt{-1}), \qquad \ldots . (147)$$

worin a den noch näher zu bestimmenden Abstand vom Anfangspunkte bezeichnet, in welchem die gerade Linie die reelle Axe durchschneidet.

Bezeichnet man die Länge des Vektors vom Anfangspunkte nach dem gegebenen Punkte, durch welchen die Linie gehen soll, mit ϱ_1, und den Neigungswinkel desselben gegen die reelle Axe mit φ_1; so muß man offenbar aus Gleichung (147) für $\varphi = \varphi_1$

$$(\varrho_1) = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi_1)} (\cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 . \sqrt{-1}), \qquad \ldots . (148)$$

also

$$\varrho_1 = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi_1)},$$

mithin

$$a = \frac{\varrho_1 \sin(\alpha - \varphi_1)}{\sin \alpha} \qquad \ldots . (149)$$

erhalten.

Substituirt man diesen Werth für a in die Gleichung (147); so ergibt sich für die Gleichung der gesuchten geraden Linie

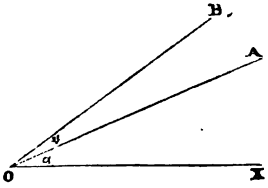
$$(\varrho) = \frac{\varrho_1 \sin(\alpha - \varphi_1)}{\sin(\alpha - \varphi)} (\cos \varphi + \sin \varphi . \sqrt{-1}) \qquad \ldots . (150)$$

§. 91. Gleichung einer geraden Linie, welche sich gegen eine andere unter einen bestimmten Winkel neigt, und durch einen gegebenen Punkt der letzteren geht.

Nehmen wir zuvörderst an, die erstere Linie OA, welche sich unter dem Winkel $AOX = \alpha$ gegen die positive reelle Axe neigt, gehe durch den Nullpunkt O; alsdann wird die Gleichung derselben

$$(\varrho) = \varrho e^{\alpha\sqrt{-1}} = \varrho(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1}) \qquad \ldots.(151)$$

sein. Soll nun eine Linie OB dargestellt werden, welche sich gegen die erstere unter dem Winkel $BOA = \psi$ neigt; so entspricht die Erzeugung der Linie OB aus der OA einer Drehung der letzteren um den Winkel ψ. Nach den Prinzipien des zweiten Abschnittes wird man demnach den arithmetischen Ausdruck für einen Vektor der Linie OB von der Länge ϱ erhalten, wenn man den vorstehenden Ausdruck des Vektors der Linie OA von derselben Länge mit dem Richtungskoeffizienten



$$e^{\psi\sqrt{-1}} = \cos\psi + \sin\psi.\sqrt{-1}$$

multiplizirt. Dies ergibt unmittelbar für die Gleichung der Linie (OB)

$$(\varrho) = \varrho\, e^{(\alpha+\psi)\sqrt{-1}} = \varrho\,[\cos(\alpha+\psi) + \sin(\alpha+\psi).\sqrt{-1}], \ldots.(152)$$

worin man eine Linie erkennt, welche sich unter dem Winkel $\alpha+\psi = BOX$ gegen die positive reelle Axe neigt.

Hätte man die Gleichung der Linie OA zwischen rechtwinkligen Koordinaten in der Form

$$(\varrho) = x + x\,\mathrm{tang}\,\alpha.\sqrt{-1} = \frac{x}{\cos\alpha}(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1}) \ldots.(153)$$

gegeben; so würde man durch eine Multiplikation mit dem Richtungskoeffizienten $\cos\psi + \sin\psi.\sqrt{-1}$ für die Gleichung der Linie (OB)

$$(\varrho) = \frac{x}{\cos\alpha}[\cos(\alpha+\psi) + \sin(\alpha+\psi).\sqrt{-1}],$$

oder wenn man

$$\frac{x\cos(\alpha+\psi)}{\cos\alpha}=x',\ \text{also}\ \frac{x}{\cos\alpha}=\frac{x'}{\cos(\alpha+\psi)}\ \text{und}$$

$$\frac{x\sin(\alpha+\psi)}{\cos\alpha}=x'\operatorname{tang}(\alpha+\psi)$$

setzt, und darauf den Akzent der Abszisse x weiter wegläßt,

$$(\varrho)=x+x\operatorname{tang}(\alpha+\psi).\sqrt{-1} \qquad \ldots.(154)$$

erhalten, eine Gleichung, welche nach Gleichung (134) ebenfalls eine gerade Linie bezeichnet, die sich unter dem Winkel $\alpha+\psi$ gegen die reelle Axe neigt, wie man auch a priori hätte schließen können.

Soll die Linie OB rechtwinklig auf OA stehen; so würde man, da alsdann $\psi=\frac{\pi}{2}$ ist, die Gleichungen (151) und (153) mit dem Richtungskoeffizienten $\sqrt{-1}$ zu multipliziren haben, und demgemäß statt der Gleichungen (152) und (154) die folgenden

$$(\varrho)=\varrho(-\sin\alpha+\cos\alpha.\sqrt{-1}) \qquad \ldots.(155)$$

oder

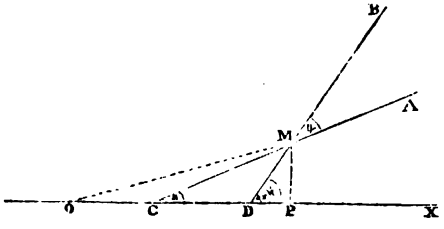
$$(\varrho)=x-\frac{x}{\operatorname{tang}\alpha}\sqrt{-1} \qquad \ldots.(156)$$

erhalten.

Wenn die erste gerade Linie CA nicht durch den Nullpunkt 0 geht, also nach Gleichung (138) allgemein durch

$$(\varrho)=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha-\varphi)}(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$$

dargestellt wird, und die zweite Gerade DB, welche sich unter dem



Winkel $BMA=\psi$ gegen die erstere neigt, durch einen Punkt M der Linie CA gehen soll, dessen Polarkoordinaten $OM=\varrho_1$ und $MOX=\varphi_1$ sind; so muß man offenbar

$$\varrho_1=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha-\varphi_1)}$$

haben. Nach Gleichung (150) ist nun die Gleichung einer Linie, wie DB, welche sich unter dem Winkel $BDX=\alpha+\psi$ gegen die reelle Axe neigt,

$$(\varrho)=\frac{\varrho_1\sin(\alpha+\psi-\varphi_1)}{\sin(\alpha+\psi-\varphi)}(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1}) \quad \ldots.(157)$$

Substituirt man hierin für ϱ_1 den vorhergehenden Werth in φ_1; so erhält man für die gesuchte Gleichung der Linie DB

$$(\varrho)=\frac{a\sin\alpha\sin(\alpha+\psi-\varphi_1)}{\sin(\alpha-\varphi_1)\sin(\alpha+\psi-\varphi)}(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1}) \ldots.(158)$$

Will man die Gleichung der Linie DB zwischen rechtwinkligen Koordinaten herstellen; so ist nach Gleichung (135) die Gleichung der Linie CA

$$(\varrho)=x+(x-a)\operatorname{tang}\alpha.\sqrt{-1}.$$

Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes M, durch welchen die zweite Linie DB gehen soll, mit x_1 und y_1, so muß man wegen der vorstehenden Gleichung

$$y_1=(x_1-a)\operatorname{tang}\alpha$$

haben. Nach Gleichung (146) ist nun die Linie DB, welche sich gegen die reelle Axe unter dem Winkel $BDX=\alpha+\psi$ neigen wird, durch

$$(\varrho)=x+[(x-x_1)\operatorname{tang}(\alpha+\psi)+y_1]\sqrt{-1} \quad \ldots.(159)$$

dargestellt. Setzt man hierin für y_1 den vorhergehenden Werth; so geht diese Gleichung für die Linie DB über in

$$(\varrho)=x+[(x-x_1)\operatorname{tang}(\alpha+\psi)+(x_1-a)\operatorname{tang}\alpha]\sqrt{-1} \ldots.(160)$$

Wenn die Linie DB auf CA im Punkte M perpendikular

ſtehen ſoll; ſo erhält man für die Gleichungen derſelben durch Subſtitution von $\psi = \frac{\pi}{2}$ in die Gleichungen (158) und (160)

$$(\varrho) = \frac{a \sin \alpha}{\operatorname{tang}(\alpha - \varphi_1) \cos(\alpha - \varphi)} (\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) \ldots . (161)$$

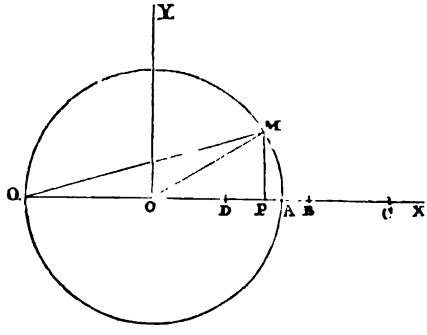
oder

$$(\varrho) = x + \left[-\frac{(x - x_1)}{\operatorname{tang}\alpha} + (x_1 - a) \operatorname{tang}\alpha \right] \sqrt{-1} \quad \ldots . (162)$$

Der Kreis.

§. 92. Gleichung des Kreiſes.

Die Kreislinie iſt der lineare Zug, welchen der Endpunkt A einer geraden Linie OA beſchreibt, wenn dieſelbe in Ein und derſelben Ebene um den anderen Endpunkt O herumgedrehet wird. Bezeichnet man daher die konſtante Länge der Linie OA oder des Halbmeſſers des Kreiſes mit r; ſo folgt aus dem Vorſtehenden unmittelbar, daß die Gleichung des Kreiſes zwiſchen Polarkoordinaten aus dem Mittelpunkte O, als Nullpunkte,



$$(\varrho) = (-)^m r = r e^{\varphi\sqrt{-1}} = r(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) \quad \ldots . (163)$$

ſein wird, worin φ den unabhängig veränderlichen Winkel MOX bezeichnet, welchen irgend ein Vektor OM mit der zur poſitiven reellen Axe angenommenen Linie OX einſchließt.

Will man die Gleichung des Kreiſes zwiſchen den rechtwinkligen Koordinaten $OP = x$ und $MP = y$ in der Form

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1}$$

herſtellen, indem man den Mittelpunkt des Kreiſes als Anfangspunkt des Koordinatenſyſtemes beibehält; ſo hat man nach §. 81

$$r\cos\varphi = x \text{ und}$$
$$r\sin\varphi = y$$

zu ſetzen, und die Größe φ zu eliminiren. Hierdurch erhält man

$$y = F(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \qquad \ldots\ldots(164)$$

mithin für die Gleichung des Kreiſes

$$(\varrho) = x \pm \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{-1}. \qquad \ldots\ldots(165)$$

Wenn man den Anfangspunkt des Koordinatenſyſtemes in der Richtung XO um die Länge des Halbmeſſers $OO_1 = r$ zurück in die Peripherie des Kreiſes verlegt; ſo erhält man die Gleichung desſelben zwiſchen den Polarkoordinaten $O_1M = \varrho_1$ und $MO_1X = \varphi_1$ in der Form

$$(\varrho_1) = \varrho_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\sqrt{-1}),$$

wenn man in den Formeln (107) $\gamma = 0$, $c = r$ ſetzt und beachtet, daß wegen der Gleichung (163) $\varrho = \Phi(\varphi) = r$ iſt. Hiernach hat man alſo

$$r\cos\varphi + r = \varrho_1\cos\varphi_1 \text{ und}$$
$$r\sin\varphi = \varrho_1\sin\varphi_1.$$

Nach einer Elimination von φ erhält man aus dieſen beiden Gleichungen

$$\varrho_1 = 2r\cos\varphi_1, \qquad \ldots\ldots(166)$$

mithin für die Gleichung des Kreiſes aus einem Punkte O_1 in der Peripherie und für den Durchmeſſer O_1OA als reelle Axe

$$(\varrho_1) = 2r\cos\varphi_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\cdot\sqrt{-1}) \qquad \ldots\ldots(167)$$

Für denſelben Anfangspunkt O_1 ergibt ſich die Gleichung des Kreiſes zwiſchen den rechtwinkligen Koordinaten $O_1P = x_1$ und $MP = y_1$ nach §. 82, wenn man daſelbſt $a = r$ und $b = 0$, alſo wegen der obigen Gleichung

$$x + r = x_1 \text{ und}$$
$$F(x) = \sqrt{r^2 - x^2} = y_1$$

ſetzt. Eliminirt man zwiſchen dieſen beiden Gleichungen die Größe x; ſo findet ſich

$$y_1 = \sqrt{x_1(2r - x_1)}, \qquad \ldots\ldots(168)$$

und demnach für die Gleichung des Kreises aus dem Punkte O_1

$$(\varrho_1) = x_1 \pm \sqrt{x_1(2r - x_1)}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(169)$$

Aus der letzteren Formel erkennt man, daß irgend ein auf dem Durchmesser O_1A im Punkte P bis zum Durchschnitte mit der Kreislinie errichtetes Perpendikel $PM = y$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten $O_1P = x_1$ und $PA = 2r - x_1$ des Durchmessers darstellt.

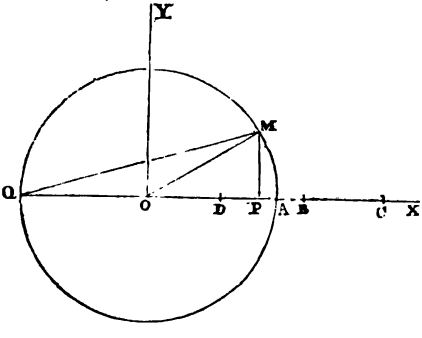
§. 93. Solange in der Gleichung

$$(\varrho) = x \pm \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(170)$$

des Kreises der absolute Werth von $x < r$ ist, stellt diese Formel einen Vektor dar, welcher gegen die reelle Axe eine gewisse Neigung besitzt. Für $x = \pm r$ wird $(\varrho) = \pm r$ und jener Vektor fällt mit der positiven oder negativen reellen Axe zusammen. Für alle Werthe von x, deren absolute Quantitäten $> r$ sind, nimmt die vorstehende Gleichung die Form

$$(\varrho) = x \pm \sqrt{x^2 - r^2} \qquad \ldots\ldots(171)$$

an, und stellt demnach nur Längen dar, welche in der Richtung der positiven oder negativen reellen Axe liegen. Wäre z. B. für $x = OB$, $\sqrt{x^2 - r^2} = BC = BD$; so würden die beiden Werthe von (ϱ), welche der obigen Gleichung (163) oder (164) entsprechen OC und OD sein. Je größer x angenommen wird, desto weiter rückt der Punkt C auf der Linie OX hinaus, und desto mehr nähert sich Punkt D dem Mittelpunkte O des Kreises, ohne denselben jedoch jemals ganz zu erreichen, da stets $x > \sqrt{x^2 - r^2}$ bleibt. Für ein negatives x, dessen absoluter



Werth $>r$ ist, fallen die beiden Punkte C und D auf die linke Seite des Mittelpunktes, liegen aber stets in der reellen Axe.

Hieraus ersieht man, daß durch die Gleichung (163), wenn man darin für x einen jeden positiven oder negativen Werth substituiren will, nicht bloß die Kreislinie, sondern auch der in der reellen Axe liegende nach beiden Seiten ins Unendliche verlängerte Durchmesser dargestellt wird.

Wenn man die Gleichung des Kreises in der gewöhnlichen Weise durch die beiden rechtwinkligen Koordinaten x und y in der Form

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

darstellt; so liefert dieselbe für $x > r$ das imaginäre Resultat

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{x^2 - r^2}\sqrt{-1}.$$

Da nun bei dieser Bezeichnungsweise ausdrücklich verlangt wird, daß die Ordinate y vom Endpunkte der Abszisse x in perpendikularer Richtung zu der Abszissenlinie gemessen werde: so fordert das vorstehende Resultat nach unserer Definition von der Bedeutung der imaginären Größen, daß nunmehr die Länge $\sqrt{x^2 - r^2}$ vom Endpunkte der Abszisse x rechtwinklig gegen die Ordinatenrichtung, also längs der Abszissenlinie gemessen werde, was mit der vorhergehenden Betrachtung übereinstimmt.

Einer Einführung von Werthen für x, welche $> r$ sind, in die Gleichung

$$(\varrho) = x + \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{-1}$$

oder von Werthen für $\frac{x}{r}$, welche > 1 sind, in die Gleichung

$$(\varrho) = r\left[\frac{x}{r} + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\sqrt{-1}\right]$$

entspricht die Einführung von Werthen für $\sin\varphi$, welche > 1 sind, in die Gleichung

$$(\varrho) = r(\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \sqrt{-1})$$

oder auch von rein imaginären Werthen für den Bogen φ in dieselbe Gleichung, vergl. die Untersuchung des §s 47ª. Man hat daselbst bereits gesehen, daß die Formel

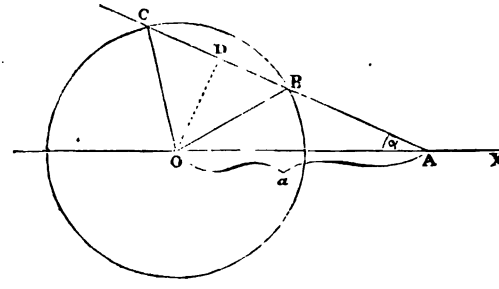
$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \sqrt{-1}$$

für rein imaginäre Werthe von φ Vektorradien darstellt, welche in der reellen Axe liegen, was mit dem Obigen zusammentrifft.

Man sieht, daß wenn die vorstehenden Gleichungen nur eine Kreislinie darstellen sollen, die Veränderlichkeit der Koordinaten φ oder x dahin beschränkt werden muß, daß φ nur zwischen allen reellen Größen und x nur zwischen solchen reellen Größen variire, deren absolute Werthe $< r$ sind.

§. 94. Es sollen die Durchschnittspunkte einer Geraden AC, welche sich in der hienunter verzeichneten Weise unter dem Winkel CAO = α gegen die reelle Axe AO neigt, und diese Axe im Abstande OA = a durchschneidet, mit einem um O beschriebenen Kreise bestimmt werden.

Da hier der Neigungswinkel der Linie AC gegen die positive reelle Axe CAX = $\pi - \alpha$ ist; so erhält man für die Gleichung jener Linie nach Gleichung (135), wenn man dort $\pi - \alpha$ an die Stelle von α setzt,



$$(\varrho) = x - (x - a)\operatorname{tang}\alpha \cdot \sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (172)$$

Die Formel für den um O mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis ist

$$(\varrho) = x \pm \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{-1}. \qquad \ldots\ldots (173)$$

Sollen beide Linien (die Gerade und der Kreis) einen Punkt gemein haben; so muß der Vektor (ϱ) aus den vorstehenden bei-

den Gleichungen für jenen Punkt Ein und denselben Werth haben. Setzt man daher diese Ausdrücke einander gleich; so ergibt sich nach gehöriger Entwickelung für die dem Durchschnittspunkte zugehörige Abszisse

$$x = a\sin^2\alpha \pm \cos\alpha\sqrt{r^2 - a^2\sin^2\alpha}, \quad \ldots.(174)$$

und da hiernach

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = a\sin\alpha\cos\alpha \mp \sin\alpha\sqrt{r^2 - a^2\sin^2\alpha} \quad \ldots.(175)$$

ist; so hat man für den Vektorradius des Durchschnittspunktes

$$(\varrho) = a\sin^2\alpha \pm \cos\alpha\sqrt{r^2 - a^2\sin^2\alpha} + (a\sin\alpha\cos\alpha \mp \sin\alpha\sqrt{r^2 - a^2\sin^2\alpha})\sqrt{-1}. \quad \ldots.(176)$$

Jenachdem man in diesem Ausdrucke die oberen oder die unteren Zeichen nimmt, erhält man zwei Durchschnittspunkte der geraden Linie mit dem Kreise, nämlich resp. B oder C.

Bei gehöriger Reduktion läßt sich der vorstehende Ausdruck (176) auch in folgende Form bringen

$$(\varrho) = a + (a\cos\alpha \mp \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\alpha})(-\cos\alpha + \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1}$$

oder

$$(\varrho) = a + (a\cos\alpha \mp \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\alpha})[\cos(\pi - \alpha) + \sin(\pi - \alpha)\sqrt{-1}]. \quad \ldots(177)$$

Hierdurch wird der Vektor $(\varrho) = (OB)$ oder $= (OC)$ als die arithmetische Summe zweier anderen Linien dargestellt, von denen die Eine $a = OA$ ist, und die andere nothwendig in der Richtung der Geraden AC liegen muß, weil dieselbe deren Richtungskoeffizienten $\cos(\pi - \alpha) + \sin(\pi - \alpha).\sqrt{-1}$ besitzt. Diese zweite Linie stellt demnach den Abstand des Durchschnittspunktes B oder C vom Punkte A dar, und man hat, wenn man die absolute Länge dieser Linie AB oder AC mit b bezeichnet,

$$b = a\cos\alpha \mp \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\alpha}. \quad \ldots.(178)$$

Wenn $a\sin\alpha = r$, d. h. wenn das von O auf AC gefällte Perpendikel gleich dem Halbmesser des Kreises ist; so verschwindet aus den vorstehenden Ausdrücken die zweideutige Wurzelgröße, die beiden Durchschnittspunkte B und C fallen in Einen zusammen und die Linie AC wird eine Tangente an den Kreis.

Man hat alsdann für den Berührungspunkt

$$x = a\sin^2\alpha = \frac{r^2}{a}, \qquad \ldots.(179)$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = a\sin\alpha\cos\alpha = \frac{r\sqrt{a^2 - r^2}}{a}, \qquad \ldots.(180)$$

$$(\varrho) = a\sin^2\alpha + a\sin\alpha\cos\alpha.\sqrt{-1} = a\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha.\sqrt{-1}$$
$$= r(\sin\alpha + \cos\alpha.\sqrt{-1})$$
$$= \frac{r^2}{b} + \frac{r}{a}\sqrt{a^2 - r^2}.\sqrt{-1}, \qquad \ldots.(181)$$

$$b = a\cos\alpha = \sqrt{a^2 - r^2}, \qquad \ldots.(182)$$

Da der nach dem Berührungspunkte gezogene Halbmesser durch

$$r(\sin\alpha + \cos\alpha.\sqrt{-1}) = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).\sqrt{-1}\right]$$

dargestellt wird, und seine absolute Länge r, mithin sein Richtungskoeffizient $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).\sqrt{-1}$ ist; so folgt, daß die Neigung desselben gegen die positive reelle Axe $= \frac{\pi}{2} - \alpha$ sein wird. Da nun die Summe der drei Winkel in dem Dreiecke OAB gleich π, aber $BAO = \alpha$ und $BOA = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ist; so folgt, daß der Winkel OBA, welchen die Tangente AB mit dem Halbmesser OB des Berührungspunktes B einschließt, $= \frac{\pi}{2}$ oder ein rechter ist.

Wenn $a\sin\alpha > r$ ist; so wird der Ausdruck für x und $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ imaginär, und die Gerade schneidet den Kreis alsdann nicht mehr. Imaginäre Größen haben aber einen wirklichen Werth, und gehören nicht in das Bereich der absoluten Unmöglichkeit; es fragt sich, welchen Sinn man hier mit dem gemeinschaftlichen Durchschnitte einer gegebenen Geraden und eines Kreises zu verstehen habe, wenn die Rechnung für die Koordinaten der Durchschnittspunkte imaginäre, also Werthe ergibt, welche

in geneigten Richtungen gegen die angenommenen Koordinatenrichtungen gemeſſen werden müſſen.

Für alle reellen Werthe von x, welche $< r$ ſind, ſtellt die obige Formel

$$(\varrho) = x \pm \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{-1}$$

die Kreislinie dar; für alle reellen Werthe von x, welcher $> r$ ſind, ſtellt dieſelbe die ins Unendliche verlängerte Linie OA dar. Nun kann man aber, wenn dieſe Formel ganz allgemein ſein ſoll, für x auch imaginäre Werthe ſubſtituiren; alsdann werden durch dieſelbe noch eine unendliche Menge anderer nicht in der Kreislinie und auch nicht in der Axe OA liegender Punkte dargeſtellt, welche den ſtetigen Zug einer Kurve bilden, ſobald man für x immer nur ſolche imaginäre Werthe ſetzt, welche Ein und derſelben Einheit angehören, oder welche in Ein und derſelben Richtung liegen, alſo allgemeine Werthe von der Form

$$x'(\cos\vartheta + \sin\vartheta . \sqrt{-1}),$$

worin alsdann x' zwiſchen allen abſoluten Größen variabel, ϑ aber für die ganze Reihe konſtant iſt.

Ebenſo ſtellt die Formel

$$(\varrho) = x - (x - a)\operatorname{tang}\alpha . \sqrt{-1}$$

nur für reelle Werthe von x die gegebene gerade Linie AC dar; für imaginäre Werthe von x aber beliebige andere Punkte der Koordinatenebene, welche ſich immer in den ſtetigen Zug einer geraden Linie zuſammenſetzen, ſobald man für x immer nur ſolche imaginäre Werthe ſetzt, welche in derſelben Richtung liegen oder der obigen Form

$$x'(\cos\vartheta + \sin\vartheta . \sqrt{-1})$$

entſprechen.

Hieraus folgt, daß wenn ſich die gegebene Kreislinie und die gegebene Gerade, welche nur als beſondere Fälle in den vorſtehenden beiden Formeln enthalten ſind, durchſchneiden ſollen, ein ſolches Schneiden nur für reelle Werthe von x und zwar nur für reelle Werthe, welche $< r$ ſind, erfolgen kann, weil für größere reelle Werthe und auch für imaginäre Werthe von x durch die erſtere Gleichung nicht mehr der Kreis und für imaginäre Werthe von x nicht mehr die gegebene Gerade dargeſtellt wird.

Durch die Gleichsetzung der beiden Werthe des Vektors (ϱ) aus jenen beiden Formeln ist nun noch nicht im Voraus gesagt, ob der dadurch hergestellten Gleichung durch die gedachten reellen Werthe von x ein Genüge geleistet werden kann. Ergibt die Auflösung der letzteren Gleichung einen solchen Werth für x; so findet ein wirklicher Schnitt zwischen dem Kreise und der geraden Linie statt, oder es fallen zwei Punkte zusammen, welche sowol durch die Gleichung (173), wie durch die Gleichung (172) dargestellt werden, und von denen der Eine außerdem im Zuge des fraglichen Kreises und der andere im Zuge der fraglichen geraden Linie liegt. Die erste dieser beiden Bedingungen, daß je zwei durch die obigen beiden Gleichungen dargestellten Punkte zusammenfallen, wird immer erfüllt, sobald man die Werthe der Vektoren (ϱ) aus beiden Gleichungen einander gleich setzt; die letztere Bedingung, daß die zusammenfallenden Punkte resp. dem Kreise und der in Rede stehenden Geraden angehören, kann a priori nicht gestellt werden, da dieselbe von der Auflösung der Gleichung zwischen den beiden Vektoren abhängt, und nur dann erfüllt wird, wenn diese Auflösung für x einen reellen Werth ergibt, der $\leqq r$ ist.

Sobald die zuletzt erwähnte Auflösung für x einen reellen Werth $>r$ oder einen imaginären Werth von der Form $x'(\cos\vartheta + \sin\vartheta . \sqrt{-1})$ liefert; so erhält man durch Substitution dieses Werthes von x in die Gleichung (172) oder (173) immer den Vektor eines Punktes, welcher sowol durch die Eine, wie die andere dieser Gleichungen dargestellt wird; dieser Punkt gehört alsdann aber nicht mehr dem Kreisumfange, sondern einer anderen Kurve an, welche man ebenfalls aus Gleichung (173) erhält, wenn man darin für x nur Werthe von der Form $x'(\cos\vartheta + \sin\vartheta . \sqrt{-1})$ einführt, in welchen x' reell und veränderlich und ϑ konstant ist.

Nähme man z. B. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ an, sodaß die Gerade AC auf OA in dem Abstande $OA = a$ perpendikular stände; so würde man wegen der Gleichungen (174), (175) und (176) für den Durchschnittspunkt der Geraden mit dem Kreise

$$x = a,\quad y = \mp\sqrt{r^2 - a^2},\quad (\varrho) = a \mp \sqrt{r^2 - a^2}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(183)$$

erhalten. Wäre nun $a > r$; so hätte man

$$x = a,\ y = \mp\sqrt{a^2-r^2}\sqrt{-1},\ (\varrho) = a \mp \sqrt{a^2-r^2} \quad \ldots\ldots(184)$$

Aus den letzteren Gleichungen folgt, daß die Länge $\sqrt{a^2-r^2}$ der Ordinate y des Durchschnittspunktes, welche unter den angenommenen Umständen imaginär wird, längs der Abszissenare OA vom Endpunkte der Abszisse $x = a$ oder vom Punkte A aus zu messen ist, wie sich Dies auch aus dem Werthe von (ϱ) ergibt, welcher eine in der Are OX liegende Linie darstellt. Die Endpunkte der beiden durch (ϱ) dargestellten Punkte liegen zu beiden Seiten von A in der reellen Are um $\sqrt{a^2-r^2}$ entfernt.

Zur richtigen Verständniß dieses Resultates bemerkt man zuvörderst, daß für reelle Werthe von x, welche $> r$ sind und gleichzeitig für rein imaginäre Werthe von y, sowie sie die Auflösungen (184) erfordern, nach §. 93 die Gleichung (173) nicht mehr eine Kreislinie, sondern eine mit der reellen Are zusammenfallende gerade Linie darstellt. Hieraus folgt, daß die Durchschnittspunkte dieser Linie mit irgend einer anderen durch die Gleichung (172) dargestellten, in der Richtung der reellen Are liegen müssen, wie sich Dies denn auch bereits gezeigt hat.

Wenn man in der Gleichung (172) der geraden Linie die Bedingung $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also $\operatorname{tang}\alpha = \infty$ oder $= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{0}$ einführt; so wird dieselbe

$$(\varrho) = x - \frac{x-a}{0}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(185)$$

und ergibt für den Werth $x = a$ das ganz unbestimmte Resultat

$$(\varrho) = a - \frac{0}{0}\sqrt{-1}, \qquad \ldots\ldots(186)$$

worunter man sich jede beliebige, und demnach auch die Größe (ϱ) aus den Gleichungen (184) vorstellen kann, indem man $\frac{0}{0} =$ der imaginären Größe $\pm\sqrt{a^2-r^2}\sqrt{-1}$ setzt. Man ist zwar geneigt, hier für $\frac{0}{0}$ nur reelle Werthe zuzulassen, damit durch die Gleichung (185) eine im Punkte A auf der reellen Are OX

perpendikular ſtehende Linie dargeſtellt werde, da es jedoch wegen der Gleichungen (184) nothwendig wird, daß die Ordinate y des gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunktes oder auch der Werth von $-\frac{x-a}{0}$ aus Gleichung (185) imaginär werde, was dem Zuge eines Perpendikels auf OX keineswegs entſpricht; ſo kann man ſchon a priori ſchließen, daß ſich die Gleichung (185) noch in eine andere Form werde bringen laſſen, in welcher ſie bei der Subſtitution einer gewiſſen Klaſſe von Werthen für x, die zugleich den Gleichungen (184) ein Genüge leiſten, nicht ein in A errichtetes Perpendikel, ſondern irgend eine andere Linie darſtellt.

Zu dieſem Ende rekurriren wir zu den Polargleichungen für den Kreis und für die gerade Linie, indem wir für die obigen Gleichungen (173) und (172) nach Gleichung (163) und nach Gleichung (138) reſp. die folgenden

$$(\varrho) = r(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) \qquad \ldots . (187)$$

und

$$(\varrho) = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha-\varphi)}(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})$$

oder auch für die letztere, wenn man mit α nicht den Winkel CAX, ſondern den Winkel CAO, wie vorhin, bezeichnen will,

$$(\varrho) = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)}(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) \qquad \ldots . (188)$$

ſubſtituiren.

Setzt man jetzt in der letzteren Gleichung $\alpha = \frac{\pi}{2}$, um dadurch ein in A auf OX errichtetes Perpendikel darzuſtellen; ſo erhält man

$$\left.\begin{aligned}(\varrho) &= \frac{a}{\cos\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) \\ &= a + a\,\mathrm{tang}\,\varphi . \sqrt{-1}\end{aligned}\right\} \qquad \ldots . (189)$$

Eine Gleichſetzung der beiden Werthe von (ϱ) aus den Gleichungen (187) und (189) behuf Beſtimmung des Durchſchnittspunktes der dadurch dargeſtellten Linien ergibt nun

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} \quad \text{oder}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \qquad \ldots\ldots (190)$$

Ist nun $a > r$, also der Kosinus des dem Durchschnittspunkte angehörigen Winkels φ reell und größer, als die Einheit; so entspricht dieses Resultat nach §. 47ª Gleichung (47) einem rein imaginären Werth von φ, z. B. dem Werthe

$$\varphi = \psi\sqrt{-1},$$

für welchen der Kosinus immer reell und >1, der Sinus (s. §. 47ª Gleichung 48) aber rein imaginär, also auch die Tangente rein imaginär ist. Für dergleichen Werthe von φ stellt die Gleichung (187) aber nicht mehr eine Kreislinie, sondern eine mit der reellen Axe zusammenfallende Gerade dar. Ebenso findet man, daß für diese Klasse von Werthen für den Winkel φ auch die Gleichung (189) nicht mehr eine in A auf der Axe OX perpendikular stehende, sondern eine in der Richtung dieser Axe selbst liegende Linie darstellt.

Hieraus wird es nun klar, wie die Rechnung für die Durchschnittspunkte der beiden durch die Gleichungen (187) und (189) oder durch die Gleichungen (173) und (185) dargestellten Linien zwei Punkte ergeben kann, welche in der reellen Axe OX liegen. Eine jede dieser beiden Gleichungen stellt nämlich für Werthe von der Form $\varphi = \psi\sqrt{-1}$ oder für Werthe von x, welche reell und $> r$ sind, eine in der Richtung der reellen Axe liegende gerade Linie dar. Diese beiden Linien decken sich nun zwar in ihrer ganzen Ausdehnung, den verschiedenen Werthen von φ oder x entsprechen aber für beide Linien verschiedene Punkte der reellen Axe, und die obigen Auflösungen lassen diejenigen zwei Punkte erkennen, welche für Ein und denselben Werth von φ oder x zusammenfallen, und welche um $\sqrt{a^2 - r^2}$ von dem Punkte A nach der linken und rechten Seite abstehen.

Für die zuletzt gemachte Voraussetzung, daß $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $a > r$ sei, ergibt sich endlich aus der Gleichung (178) für die Länge b, welche von A aus längs der durch Gleichung (172)

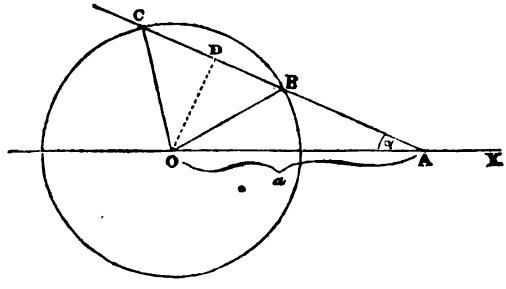
gegebenen Geraden, alſo längs des in A auf OX errichteten Perpendikels gemeſſen werden muß, um in den Durchſchnittspunkt B oder C zu kommen,

$$b = \mp\sqrt{a^2 - r^2}\sqrt{-1}. \qquad \ldots.(191)$$

Dieſer Ausdruck lehrt, daß man, um vom Punkte A nach dem geſuchten zu gelangen, die abſolute Länge $\sqrt{a^2-r^2}$ nicht längs AB, ſondern rechtwinklig zu AB, d. i. längs der Axe AX oder AO zu meſſen habe, was mit der Lage der fraglichen Punkte, die hier in die Axe OX fallen, genau übereinſtimmt.

§. 95. Beziehungen zwiſchen den verſchiedenen Sekanten und Sehnen eines Kreiſes.

1) Wenn man den Abſtand AB des erſten Durchſchnittspunktes der Sekante AC von A mit b_1 und den Abſtand AC des zweiten Durchſchnittspunktes b_2 bezeichnet; ſo iſt nach Gleichung (178) das Produkt dieſer beiden Abſtände



$$b_1 b_2 = (a\cos\alpha - \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\alpha})(a\cos\alpha + \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\alpha}) = a^2 - r^2, \ldots.(192)$$

alſo gleich dem Quadrate einer von A an den Kreis gezogenen Tangente (Gleichung 182) und vom Winkel CAO=α ganz unabhängig.

2) Für irgend eine andere Sekante, welche gleichfalls durch den Punkt A geht, und deren Durchſchnittspunkte reſp. um c_1 und c_2 von A abſtehen, hat man ebenfalls $c_1 c_2 = a^2 - r^2$, mithin allgemein

$$b_1 b_2 = c_1 c_2 \text{ oder } \frac{b_1}{c_1} = \frac{c_2}{b_2} \quad \ldots\ldots (193)$$

Dieser Satz behält natürlich auch dann noch Gültigkeit, wenn der Punkt A innerhalb des Kreises liegt und den Durchschnittspunkt zweier Sehnen bildet, deren Abschnitte zu beiden Seiten dieses Punktes resp. b_1, b_2 und c_1, c_2 sind.

3) Die Länge der Sehne BC ist

$$c = b_2 - b_1 = 2\sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots (194)$$

Nach Gleichung (176) hat man ferner für die Vektoren der Durchschnittspunkte (OC) und (OB) resp.

$$(OC) = r\left\{\left[\frac{a\sin^2\alpha}{r} - \cos\alpha\sqrt{1-\left(\frac{a\sin\alpha}{r}\right)^2}\right] + \left[\frac{a\sin\alpha\cos\alpha}{r} + \sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{a\sin\alpha}{r}\right)^2}\right]\sqrt{-1}\right\},$$

$$(OB) = r\left\{\left[\frac{a\sin^2\alpha}{r} + \cos\alpha\sqrt{1-\left(\frac{a\sin\alpha}{r}\right)^2}\right] + \left[\frac{a\sin\alpha\cos\alpha}{r} - \sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{a\sin\alpha}{r}\right)^2}\right]\sqrt{-1}\right\},$$

Da r sowol die absolute Länge von (OC), wie von (OB) ist; so stellen die Faktoren von r die Richtungskoeffizienten für diese beiden Radien dar. Bezeichnet man also den Winkel COA mit β_2 uud den Winkel BOA mit β_1; so sind die beiden reellen Glieder dieser Faktoren resp. gleich $\cos\beta_2$ und $\cos\beta_1$ und die in $\sqrt{-1}$ multiplizirten Größen derselben Faktoren resp. gleich $\sin\beta_2$ und $\sin\beta_1$. Zur Bestimmung des Winkels $COB = \beta_2 - \beta_1$, erhält man daher nach gehöriger Substitution und Reduktion

$$\cos(\beta_2 - \beta_1) = \cos\beta_2\cos\beta_1 + \sin\beta_2\sin\beta_1$$

$$= \left[\frac{a^2\sin^4\alpha}{r_2} - \cos^2\alpha\left(1 - \frac{a^2\sin^2\alpha}{r^2}\right)\right] + \left[\frac{a^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{r^2} - \sin^2\alpha\left(1 - \frac{a^2\sin^2\alpha}{r^2}\right)\right]$$

$$= \frac{2a^2\sin^2\alpha - r^2}{r^2},$$

und da nach einer bekannten Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\beta_2 - \beta_1)}{2}}$$

ist,

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)=\frac{\sqrt{r^2-a^2\sin^2\alpha}}{r}.$$

Da nun nach Gleichung (194) die Länge der Sehne $BC=c=2\sqrt{r^2-a^2\sin^2\alpha}$ ist; so hat man auch, wenn man den Winkel $COB=\beta_2-\beta_1=\gamma$ setzt,

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma=\frac{c}{2r} \text{ oder}$$

$$c=2r\sin\tfrac{1}{2}\gamma, \qquad \ldots.(195)$$

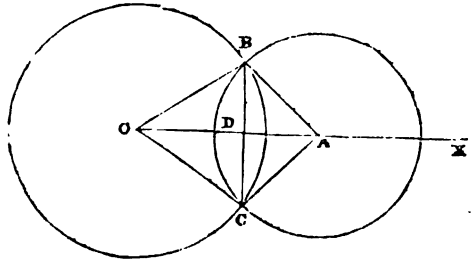
ein Resultat, welches sich auch unmittelbar aus der Betrachtung ergeben haben würde, daß COB ein gleichschenkliches Dreieck ist, in welchem sowol die Grundlinie CB, wie der Winkel COB an der Spitze durch ein aus der Letzteren auf die Erstere gefälltes Perpendikel OD halbirt wird.

§. 96 Durchschnitt zweier Kreise.

Wenn um den in der reellen Axe OA liegenden Punkt A mit dem Halbmesser r_1 ein Kreis beschrieben ist; so wird die Gleichung desselben für den Punkt A, als Anfangspunkt der rechtwinklichen Koordinaten x_1 und y_1

$$(\varrho_1)=x_1\pm\sqrt{r_1^2-x_1^2}\cdot\sqrt{-1}$$

sein. Will man diese Gleichung auf den Punkt O, welcher um die Länge $OA=a$ in der reellen Axe rückwärts von A liegt, als Anfangspunkt beziehen, indem man die neuen Koordinaten



mit x und $y=F(x)$ bezeichnet; so hat man nach §. 82, da hier

$b=0$ und $y_1=F_1(x_1)=\pm\sqrt{r_1^2-x_1^2}$ ist, (unter Beachtung des hier in umgekehrter Weise gebrauchten Index der Koordinaten)

$$x_1+a=x \text{ und}$$
$$\pm\sqrt{r_1^2-x_1^2}=y$$

zu setzen, woraus

$$y=\pm\sqrt{r_1^2-(x-a)^2},$$

also für die gesuchte Gleichung des um A beschriebenen Kreises für den Anfangspunkt O

$$(\varrho)=x\pm\sqrt{r_1^2-(x-a)^2}\cdot\sqrt{-1} \qquad \ldots.(196)$$

folgt.

Wenn ferner um O mit dem Halbmesser r ein zweiter Kreis beschrieben ist; so wird dessen Gleichung für denselben Anfangspunkt O

$$(\varrho)=x\pm\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{-1} \qquad \ldots.(197)$$

sein.

Setzt man nun, um die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte dieser beiden Kreise zu bestimmen, die Werthe von (ϱ) aus den Gleichungen (196) und (197) einander gleich; so muß

$$\sqrt{r_1^2-(x-a)^2}=\sqrt{r^2-x^2}$$

sein, und man erhält für die Abszisse OD eines solchen Durchschnittspunktes B den Werth

$$x=\frac{r^2-r_1^2+a^2}{2a}, \qquad \ldots.(198)$$

Da die entsprechende Ordinate DB eines solchen Durchschnittspunktes

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}=\pm\sqrt{r^2-\left(\frac{r^2-r_1^2+a^2}{2a}\right)^2}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{4a^2r^2-(r^2-r_1^2+a^2)^2}{4a^2}}$$
$$=\pm\frac{\sqrt{(2ar+r^2-r_1^2+a^2)(2ar-r^2+r_1^2-a^2)}}{2a}$$
$$=\pm\frac{\sqrt{[(a+r)^2-r_1^2][r_1^2-(a-r)^2]}}{2a}$$

d. i.

$$y=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(a+r+r_1)(a+r-r_1)(a+r_1-r)(r+r_1-a)}\ldots(199)$$

ist, welche zwei einander gleiche und auf entgegengesetzten Seiten der Axe liegende Werthe darstellt; so folgt daß die beiden Kreise sich nur in zwei Punkten B und C durchschneiden können, deren Verbindungslinie BC auf der Verbindungslinie OA ihrer Mittelpunkte perpendikular steht und von der Letzteren halbirt wird.

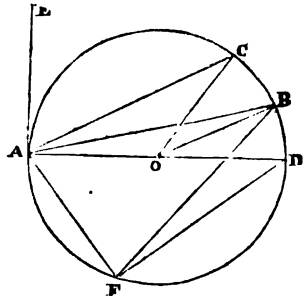
Wenn man die Linien a, r und r_1 als die drei Seiten eines Dreiecks OAB ansieht; so stellt der vorstehende Ausdruck von y die Höhe eines aus der Spitze B auf die Seite $OA=a$ gefällten Perpendikels dar, und der Ausdruck von x aus Gleichung (198) bezeichnet den Abstand OD des Fußpunktes dieses Perpendikels von der Spitze O.

Wenn $a=r+r_1$ ist; so werden die beiden Werthe von y aus Gleichung (199) gleich 0, während der von x aus Gleichung (198) gleich r wird. Die beiden Kreise um O und A berühren sich in diesem Falle.

Wenn $a>r+r_1$ ist; so wird y imaginär und $x>r$. Der Bedingung, daß zwei Vektoren für die beiden Kreise einander gleich seien, kann alsdann durch keine reellen Werthe von y und durch keine reellen Werthe von x, welche $<r$ sind, ein Genüge geleistet werden; die beiden gegebenen Kreise schneiden sich also nicht mehr, es fallen vielmehr zwei Punkte zusammen, deren Vektoren gleichfalls durch die beiden Gleichungen (196) und (197) dargestellt werden, wenn man darin die Größe x durch alle reellen und imaginären Werthe variiren läßt. (s. §. 94.)

§. 97. Alle auf demselben Bogen eines Kreisumfanges stehenden Peripheriewinkel sind einander gleich, und zwar sind sie gleich der Hälfte des auf demselben Bogen stehenden Zentrumswinkels.

Nach Gleichung (167) ist die Polargleichung des um O mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises aus dem Punkte A in seiner Peripherie, als Anfangspunkte, und für die Richtung des Halbmessers AD, als positive reelle Axe,



$$(\varrho) = 2r\cos\varphi\,(\cos\varphi + \sin\varphi\,.\sqrt{-1}) \qquad \ldots\ldots (200)$$

Hierin bezeichnet für irgend einen Punkt B des Kreises $\varrho = 2r\cos\varphi$ die Länge des Vektors AB und φ dessen Neigungswinkel BAD gegen die reelle Axe.

Wenn man den Halbmesser OB zieht, und den Winkel BOD mit ψ bezeichnet; so würde dieser Halbmesser, wenn O als Nullpunkt und OD als reelle Axe angenommen wäre, durch

$$(OB) = r(\cos\psi + \sin\psi\,.\sqrt{-1}) \qquad \ldots\ldots (201)$$

(Gleichung 163) dargestellt werden.

Zieht man nun nach einem beliebigen anderen Punkte C des Kreisumfanges von A aus den Vektor AC und von O aus den Halbmesser OC, und bezeichnet den Winkel CAD mit φ_1 und den Winkel COD mit ψ_1; so hat man wegen Gleichung (200)

$$(AC) = 2r\cos\varphi_1\,(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\,.\sqrt{-1}) \qquad \ldots\ldots (202)$$

und wegen Gleichung (201)

$$(OC) = r(\cos\psi_1 + \sin\psi_1\,.\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (203)$$

Weil sowol die drei Linie AO, OB, BA, wie die drei Linien AO, OC, CA ein Dreieck bilden; so muß man haben

$$(AB) = (AO) + (OB) \text{ und}$$
$$(AC) = (AO) + (OC),$$

d. i. gegen den vorstehenden Gleichungen (200) bis (203) und da $(AO) = r$ ist,

$2r\cos\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})=r+r(\cos\psi+\sin\psi.\sqrt{-1})$ und

$2r\cos\varphi_1(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1.\sqrt{-1})=r+r(\cos\psi_1+\sin\psi_1.\sqrt{-1})$,

oder wenn man in dieſen Gleichungen das Reelle gleich dem Reellen und das Imaginäre gleich dem Imaginären ſetzt, und gehörig reduzirt,

$$\left.\begin{aligned} 2\cos^2\varphi &= 1+\cos\psi,\\ 2\cos^2\varphi_1 &= 1+\cos\psi_1,\\ 2\sin\varphi\cos\varphi &= \sin\psi,\\ 2\sin\varphi_1\cos\varphi_1 &= \sin\psi_1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(204)$$

Aus den erſten beiden dieſer Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos\psi,\\ \cos 2\varphi_1 &= \cos\psi_1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(205)$$

und aus den letzten beiden

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\varphi &= \sin\psi,\\ \sin 2\varphi_1 &= \sin\psi_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(206)$$

Da nun keiner der Winkel ψ oder ψ_1 größer, alſo 2π ſein kann; ſo folgt aus den Gleichungen (205) und (206)

$$2\varphi=\psi \text{ und } 2\varphi_1=\psi_1;$$

demnach

$$2(\varphi_1-\varphi)=\psi_1-\psi$$

oder

$$\varphi_1-\varphi=\tfrac{1}{2}(\psi_1-\psi) \qquad \ldots\ldots(207)$$

Durch $\varphi_1-\varphi$ wird der Winkel CAB und durch $\psi_1-\psi$ der Winkel COB dargeſtellt; man ſieht alſo, daß in einem Kreiſe irgend ein Peripheriewinkel CAB gleich der Hälfte des auf demſelben Bogen BC ſtehenden Zentrumswinkels COB iſt, und daß demnach alle auf demſelben Bogen ſtehenden Peripheriewinkel einander gleich ſind.

Da das vorſtehende Reſultat von der Lage und der abſoluten Länge der Schenkel eines ſolchen Winkels unabhängig iſt; ſo folgt, daß daſſelbe auch dann noch Richtigkeit hat, wenn der Eine Schenkel AC im Verſchwinden begriffen iſt, oder mit dem Kreiselemente oder der Tangente AE im Punkte A zuſammenfällt.

Hieraus geht hervor, daß der Winkel EAB, welchen eine Sehne AB mit einer im Endpunkte der Sehne an den Kreis gelegten Tangente AE einschließt, gleich dem im gegenüberstehenden Kreisabschnitte liegenden, auf dem von der Sehne abgeschnittenen Bogen stehenden Peripheriewinkel AFB oder gleich der Hälfte des Zentrumswinkels AOB ist.

Wenn gleichzeitig, wo der Eine Schenkel AC des Winkels CAB in die Tangente AE fällt, der Andere Schenkel AB die Richtung des Durchmessers AD annimmt; so wird der Winkel EAD= einem rechten (s. §. 94), und da auch nach dem vorstehenden Satze dieser Winkel gleich dem auf dem Bogen oder Halbkreise ACD stehenden Peripheriewinkel ist; so folgt, daß ein jeder Winkel im Halbkreise, wie AFD, gleich einem rechten ist, ein Resultat, welches auch daraus hervorgeht, daß der einem solchen Peripheriewinkel zugehörige Zentrumswinkel AOD=x oder gleich zwei rechten ist.

Endlich folgt aus der obigen Untersuchung, daß die Summe zweier einander entgegenstehender Winkel eines im Kreise beschriebenen Vierecks gleich zwei rechten ist, da die Summe der Bögen, auf welchen dieselben als Peripheriewinkel stehen, gleich dem ganzen Kreisumfange, und demnach die Summe der zugehörigen Zentrumswinkel gleich vier rechten ist.

Einige allgemeine Sätze aus der Theorie der Kurven.

§. 98. Bestimmung der Länge und der Richtung irgend eines unendlich kleinen Elementes einer gegebenen Kurve.

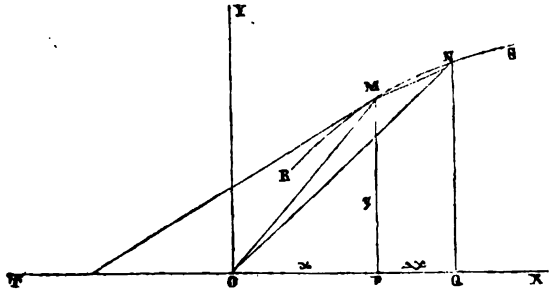
Irgend eine Kurve RS sei für den Punkt O als Anfangspunkt und die Linie OX als reelle Axe durch die Gleichung zwischen rechtwinkligen Koordinaten

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}, \qquad \ldots.(208)$$

worin

$$y=F(x) \qquad \ldots.(209)$$

ist, dargestellt, sodaß für irgend einen Punkt M der Kurve OM=ϱ, OP=x, MP=y ist.



Substituirt man in der Gleichung (209) OQ oder $x+\Delta x$ für x und entwickelt die Funktion nach der Maclaurinschen Formel in eine Reihe, welche nach den sukzessiven Potenzen von Δx fortschreitet; so erhält man für die Ordinate QN oder $y+\Delta y$

$$y+\Delta y=y+\frac{dy}{dx}\Delta x+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots\ldots(210)$$

oder

$$\Delta y=\frac{dy}{dx}\Delta x+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{1.2.3}+\text{etc.}\qquad\ldots\ldots(211)$$

Führt man den Werth $x+\Delta x$ für x und den Werth $y+\Delta y$, worin Δy die Bedeutung aus Gleichung (211) hat, in die Gleichung (208) ein; so erhält man für den Vektor ON oder

$$(\varrho+\Delta\varrho)=x+\Delta x+(y+\Delta y)\sqrt{-1}\qquad\ldots\ldots(212)$$

Zieht man nun die Sehne MN, bezeichnet deren absolute Länge mit Δs und deren Neigungswinkel gegen die reelle Axe mit α; so hat man

$$(\text{MN})=\Delta s(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1}),\qquad\ldots\ldots(213)$$

und da OMN ein Dreieck bildet,

$$(\text{OM})+(\text{MN})=\text{ON},$$

d. i. wegen der Gleichungen (208), (213) und (212)

$$x+y\sqrt{-1}+\Delta s(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})=x+\Delta x+(y+\Delta y)\sqrt{-1},$$

und wenn man das Reelle dem Reellen, und das Imaginäre dem Imaginären gleich setzt,

$$\left.\begin{aligned}\Delta s \cdot \cos\alpha &= \Delta x\\ \Delta s \cdot \sin\alpha &= \Delta y\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (214)$$

also

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \text{ oder } \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \quad \ldots\ldots (215)$$

und

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \ldots\ldots (216)$$

Nimmt man nun an, PQ oder Δx, werde unendlich klein $= dx$; so wird nach Gleichung (211) auch Δy, und demnach wegen Gleichung (215) auch Δs oder MN unendlich klein werden. Wenn die Linie MN aber unendlich klein wird; so bildet sie offenbar das dem Punkte M anliegende Element der Kurve RS. Bezeichnet man dasselbe mit ds, und beachtet, daß wenn Δx undenklich klein wird, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wegen Gleichung (211) gleich dem Differenzialkoeffizienten $\frac{dy}{dx}$ wird; so stellen sich die Gleichungen (215) und (216) in der Form der Differenzialgleichungen

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \ldots\ldots (217)$$

und

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots (218)$$

dar, worin natürlich unter y die Funktion $F(x)$ aus Gleichung (209) verstanden wird.

Wäre die Gleichung der Kurve RS durch Polarkoordinaten $OM = \varrho$ und $\angle MOX = \varphi$ in der Form

$$(\varrho) = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \sqrt{-1}), \quad \ldots\ldots (219)$$

worin

$$\varrho = \Phi(\varphi) \quad \ldots\ldots (220)$$

ist, gegeben; so würde man, um den Werth des Vektors ON zu erhalten, wenn $\angle MON = \Delta\varphi$ ist, $\varphi - \Delta\varphi$ statt φ in Gleichung

(219) zu ſetzen haben. Man erhält hierdurch zuvörderſt aus Gleichung (220) für $ON=\varrho+\Delta\varrho$

$$\varrho+\Delta\varrho=\varrho-\frac{d\varrho}{d\varphi}\Delta\varphi+\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\frac{\Delta\varphi^2}{1.2}-\frac{d^3\varrho}{d\varphi^3}\frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3}+\text{etc.} \quad \ldots.(221)$$

oder

$$\Delta\varrho=-\frac{d\varrho}{d\varphi}\Delta\varphi+\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\frac{\Delta\varphi^2}{1.2}-\frac{d^3\varrho}{d\varphi^3}\frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3}+\text{etc.} \quad \ldots.(222)$$

Führt man nun den vorſtehenden Werth von φ auch in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ein, ſo erhält man wegen Gleichung (219) für den Vektor (ON)

$$(\varrho+\Delta\varrho)=(\varrho+\Delta\varrho)[\cos(\varphi-\Delta\varphi)+\sin(\varphi-\Delta\varphi).\sqrt{-1}] \ldots.(223)$$

Bezeichnet man nun wieder die abſolute Länge der Sehne MN mit Δs und deren Neigungswinkel gegen die Axe OX mit α, ſetzt alſo

$$(MN)=\Delta s(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1}); \quad \ldots.(224)$$

ſo erhält man aus der Bedingung

$$(OM)+(MN)=(ON)$$

$$\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})+\Delta s(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})$$
$$=(\varrho+\Delta\varrho)[\cos(\varphi-\Delta\varphi)+\sin(\varphi-\Delta\varphi).\sqrt{-1}],$$

oder wenn man das Reelle dem Reellen und das Imaginäre dem Imaginären gleich ſetzt,

$$\left.\begin{aligned}\Delta s.\cos\alpha&=(\varrho+\Delta\varrho)\cos(\varphi-\Delta\varphi)-\varrho\cos\varphi\\ \Delta s.\sin\alpha&=(\varrho+\Delta\varrho)\sin(\varphi-\Delta\varphi)-\varrho\sin\varphi\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(225)$$

Wenn man eine jede dieſer beiden Gleichungen quadrirt und darauf beide addirt; ſo erhält man nach gehöriger Reduktion und wenn man beachtet, daß $\cos\varphi\cos(\varphi-\Delta\varphi)+\sin\varphi\sin(\varphi-\Delta\varphi)=\cos[\varphi-(\varphi-\Delta\varphi)]=\cos\Delta\varphi$ iſt,

$$\Delta s^2=(\varrho+\Delta\varrho)^2-2\varrho(\varrho+\Delta\varrho)\cos\Delta\varphi+\varrho^2$$

d. i.

$$\Delta s^2=2\varrho(\varrho+\Delta\varrho)(1-\cos\Delta\varphi)+\Delta\varrho^2 \quad \ldots.(226)$$

oder wenn man den Werth von $\cos\Delta\varphi$, nämlich

$$\cos\Delta\varphi = 1 - \frac{\Delta\varphi^2}{1.2} + \frac{\Delta\varphi^4}{1.2.3.4} - \text{etc.},$$

der Kürze wegen

$$\cos\Delta\varphi = 1 - \frac{\Delta\varphi^2}{2} + A\Delta\varphi^4 \qquad \ldots\ldots(227)$$

setzt, und wieder gehörig reduzirt,

$$\Delta s^2 = \varrho(\varrho+\Delta\varrho)\Delta\varphi^2 - 2A\varrho(\varrho+\Delta\varrho)\Delta\varphi^4 + \Delta\varrho^2$$
$$= \varrho^2\Delta\varphi^2 + \Delta\varrho^2 + \varrho\Delta\varrho\Delta\varphi^2 - 2A\varrho(\varrho+\Delta\varrho)\Delta\varphi^4,$$

oder wenn man mit $\Delta\varphi^2$ dividirt und die Quadratwurzel auszieht,

$$\frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{\Delta\varrho}{\Delta\varphi}\right)^2 + \varrho\Delta\varrho - 2A\varrho(\varrho+\Delta\varrho)\Delta\varphi^2} \ldots\ldots(228)$$

Wenn man ferner die beiden Gleichungen (225) durch einander dividirt; so kommt

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{(\varrho+\Delta\varrho)\sin(\varphi-\Delta\varphi) - \varrho\sin\varphi}{(\varrho+\Delta\varrho)\cos(\varphi-\Delta\varphi) - \varrho\cos\varphi},$$

oder wenn man mit dem Nenner auf der rechten Seite multiplizirt, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ an die Stelle von $\text{tang}\,\alpha$ setzt und gehörig reduzirt

$$(\varrho+\Delta\varrho)[\sin(\varphi-\Delta\varphi)\cos\alpha - \cos(\varphi-\Delta\varphi)\sin\alpha]$$
$$= \varrho(\sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha),$$

d. i.

$$(\varrho+\Delta\varrho)\sin(\varphi-\Delta\varphi-\alpha) = \varrho\sin(\varphi-\alpha)$$

oder

$$\frac{\sin(\varphi-\alpha-\Delta\varphi)}{\sin(\varphi-\alpha)} = \frac{\varrho}{\varrho+\Delta\varrho} \qquad \ldots\ldots(229)$$

Setzt man jetzt

$$\sin(\varphi-\alpha-\Delta\varphi) = \sin(\varphi-\alpha)\cos\Delta\varphi - \cos(\varphi-\alpha)\sin\Delta\varphi;$$

so ergibt sich

$$\cos\Delta\varphi - \sin\Delta\varphi\,.\cot(\varphi-\alpha) = \frac{\varrho}{\varrho+\Delta\varrho}.$$

Nachdem man nun wieder abgekürzt

$$\left.\begin{aligned}&\cos\Delta\varphi = 1-\frac{\Delta\varphi^2}{1.2}+\frac{\Delta\varphi^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}=1-B\Delta\varphi^2\\ &\text{und}\\ &\sin\Delta\varphi=\Delta\varphi-\frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3}+\frac{\Delta\varphi^5}{1.2.3.4.5}-\text{etc.}=\Delta\varphi-C\Delta\varphi^3\end{aligned}\right\}\ldots(230)$$

und

$$\frac{\varrho}{\varrho+\Delta\varrho}=1-\frac{\Delta\varrho}{\varrho+\Delta\varrho}$$

gesetzt hat, reduzirt sich die vorstehende Gleichung auf

$$B\Delta\varphi^2+(\Delta\varphi-C\Delta\varphi^3)\cot(\varphi-\alpha)=\frac{\Delta\varrho}{\varrho+\Delta\varrho},$$

oder wenn man mit $\Delta\varphi$ dividirt, auf

$$(1-C\Delta\varphi^2)\cot(\varphi-\alpha)+B\Delta\varphi=\frac{1}{\varrho+\Delta\varrho}\frac{\Delta\varrho}{\Delta\varphi}\qquad\ldots.(231)$$

Nimmt man nun an, der Winkel $MON=\Delta\varphi$ sei unendlich klein $=d\varphi$; so wird wegen Gleichung (222) auch $\Delta\varrho$, und demnach wegen Gleichung (228) auch Δs oder die Sehne MN unendlich kein. Für diese Voraussetzung wird also $\Delta s=ds$ das Element der Kurve beim Punkte M und α der Neigungswinkel desselben gegen die Axe OX. Beachtet man nun, daß im Augenblicke des Verschwindens von $\Delta\varphi$ die Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta\varphi}$ und $\frac{\Delta\varrho}{\Delta\varphi}$ gleich den Differenzialkoeffizienten $\frac{ds}{d\varphi}$ und $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ werde, und daß alle in $\Delta\varrho$ und $\Delta\varphi$ und in höhere Potenzen dieser Größen multiplizirten Glieder der Gleichungen (228) und (231) gleich null werden; so ergibt sich aus jenen Gleichungen

$$\frac{ds}{d\varphi}=\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}\qquad\ldots.(232)$$

und

$$\cot(\varphi-\alpha)=\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi},\qquad\ldots.(233)$$

worin ϱ für die Funktion $\Phi(\varphi)$ aus Gleichung (220) steht.

In diesen Gleichungen bezeichnet $\Delta\varphi$ und $d\varphi$ ein Inkrement MON des Winkels $MOP=\varphi$, welches in der Richtung von M nach X herüber gemessen ist. Will man nun mit den positiven Werthen von $\Delta\varphi$ und $d\varphi$ solche Inkremente des Win-

kels φ darstellen, welche durch eine Drehung von X nach Y herüber beschrieben werden; so hat man in jenen Gleichungen offenbar $-\Delta\varphi$ und $-d\varphi$ an die Stelle von $\Delta\varphi$ und $d\varphi$ zu setzen. Hierdurch werden die beiden Gleichungen (232) und (233)

$$\frac{ds}{d\varphi}=-\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} \qquad \ldots.(234)$$

und

$$\cot(\varphi-\alpha)=-\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi} \qquad \ldots.(235)$$

In der letzteren Gleichung stellt $\varphi-\alpha$ offenbar den Winkel TMO dar, welchen die entgegengesetzte Richtung des Kurvenelementes bei M mit dem Vektor OM einschließt.

§. 99. Rektifikation irgend eines Kurvenbogens zwischen bestimmten Koordinaten.

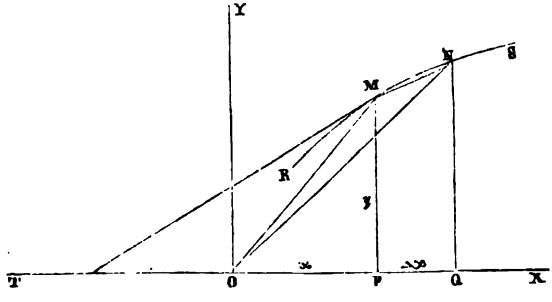
Nach den Gleichungen (217) und (234) stellen die Formeln

$$ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad \ldots.(236)$$

oder

$$ds=-d\varphi\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}, \qquad \ldots.(237)$$

in welchen $y=F(x)$ und $\varrho=\Phi(\varphi)$ ist, die Länge irgend eines unendlich kleinen Elementes MN der Kurve RS resp. für rechtwinklige oder Polarkoordinaten dar, welches einem unendlich kleinen Inkremente der unabhängig veränderlichen Koordinate x oder φ entspricht.



Aus der Theorie der bestimmten Integrale ist nun bekannt, daß die endliche Summe S einer unendlichen Menge sukzessiver Werthe von ds, welche den Gränzen $x=x_1$ und $x=x_2$ oder den Gränzen $\varphi=\varphi_1$ und $\varphi=\varphi_2$ entsprechen, wobei resp. x_2 oder φ_2 als die obere Gränze angesehen wird, unter der Voraussetzung, daß die Differenzialkoeffizienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ zwischen jenen Gränzen keine unendlichen oder unbestimmten Werthe annehmen, durch

$$S=\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad \ldots.(238)$$

oder durch

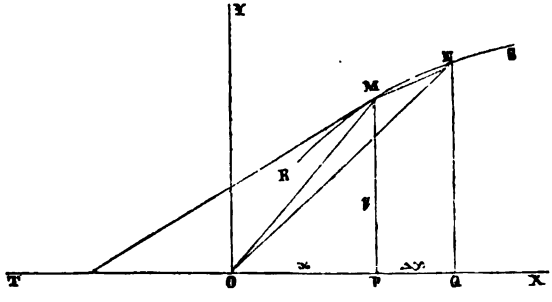
$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -d\varphi\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}=\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} \qquad \ldots.(239)$$

dargestellt wird.

Durch diese Werthe von S ergibt sich also die absolute Länge eines Kurvenbogens RS zwischen den beiden Punkten R und S, deren unabhängig veränderliche Koordinaten resp. x_1 oder φ_1 und x_2 oder φ_2 sind.

§. 100. Gleichung der Tangente in einem bestimmten Punkte einer Kurve.

Die Tangente im Punkte M einer beliebigen Kurve RS ist



diejenige gerade Linie TM, welche in der Richtung des unendlich kleinen bei M befindlichen Kurvenelementes ds liegt. Nach Gleichung (218) ist die goniometrische Tangente dieser Richtung gegen die Abszissenaxe OX allgemein

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Bezeichnet man diesen Werth für irgend einen gegebenen Punkt M, dessen Koordinaten x_1 und y_1 seien, mit

$$\text{tang}\,\alpha_1 = \frac{dy_1}{dx_1};$$

so folgt aus Gleichung (146), daß die Gleichung der Tangente TM für rechtwinklige Koordinaten

$$(\eta) = x + \left[(x - x_1)\,\frac{dy_1}{dx_1} + y_1\right]\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (240)$$

sei.

Wenn die Gleichung der Kurve durch Polarkoordinaten gegeben ist, und auch die der Tangente durch solche Koordinaten bestimmt werden soll; so hat man nach Gleichung (235) zur Bestimmung des Neigungswinkels α der Tangente irgend eines Punktes der Kurve gegen die Abszissenlinie die Gleichung

$$\cot(\varphi - \alpha) = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{d\varphi}$$

oder auch

$$\cot(\alpha - \varphi) = \frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{d\varphi},$$

und für einen gegebenen Punkt M, dessen Polarkoordinaten φ_1 und ϱ_1 seien,

$$\cot(\alpha_1 - \varphi_1) = \frac{1}{\varrho_1}\,\frac{d\varrho_1}{d\varphi_1}.$$

Nach Gleichung (150) ist die Gleichung einer Linie, welche durch denselben Punkt M geht und sich unter dem Winkel α_1 gegen die Abszissenaxe neigt,

$$(\eta) = \frac{\varrho_1 \sin(\alpha_1 - \varphi_1)}{\sin(\alpha_1 - \varphi)}\,(\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \sqrt{-1})$$

oder wenn man im Nenner $\sin(\alpha_1-\varphi)=\sin[(\alpha_1-\varphi_1)+(\varphi_1-\varphi)]$ $=\sin(\alpha_1-\varphi_1)\cos(\varphi_1-\varphi)+\cos(\alpha_1-\varphi_1)\sin(\varphi_1-\varphi)$ ſetzt, und Zähler und Nenner durch $\sin(\alpha_1-\varphi_1)$ dividirt,

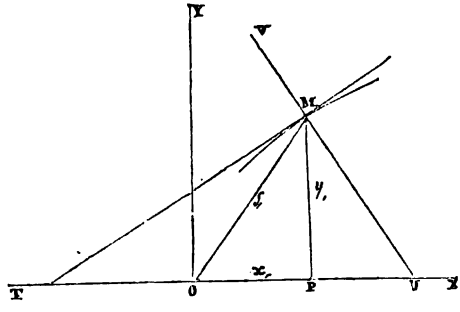
$$(\varrho)=\frac{\varrho_1}{\cos(\varphi_1-\varphi)+\cot(\alpha_1-\varphi_1)\sin(\varphi_1-\varphi)}(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1}).$$

Subſtituirt man hierin für $\cot(\alpha_1-\varphi_1)$ den obigen Werth; ſo erhält man für die geſuchte Gleichung der Tangente TM

$$(\varrho)=\frac{\varrho_1}{\cos(\varphi_1-\varphi)+\frac{1}{\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{d\varphi_1}\sin(\varphi_1-\varphi)}(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1}) \quad \ldots\ldots(241)$$

§. 101. Gleichung der Normalen in einem beſtimmten Punkte einer Kurve.

Es leuchtet ein, daß eine Normale UV auf der Richtung der Kurve in einem gegebenen Punkte M auf der Tangente TM für dieſen Punkt perpendikular ſtehen müſſe, daß alſo ihr Neigungswinkel MUX gegen die poſitive reelle Axe $\frac{\pi}{2}+\alpha_1$ ſein wird, wenn der der Tangente gegen dieſelbe Axe $=\alpha_1$ iſt.



Da nun $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1\right)}=\frac{\cos\alpha_1}{-\sin\alpha_1}=$ $-\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha_1}$ und $\operatorname{tang}\alpha_1=\frac{dy_1}{dx_1}$ iſt; ſo folgt

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1\right)=-\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}},$$

und demnach unter Berückſichtigung der Gleichung (146) für die Gleichung der Normalen im Punkte M, deſſen rechtwinklige Koordinaten x_1 und y_1 ſind,

$$(\varrho)=x+\left(y_1-\frac{x-x_1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\right)\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (242)$$

oder auch, wenn man aus der obigen Gleichung $y=F(x)$ die Größe x als Funktion von y entwickelt und den Differenzialkoeffizienten $\frac{dx}{dy}$ nimmt,

$$(\varrho)=x+\left[y_1-(x-x_1)\frac{dx_1}{dy_1}\right]\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (243)$$

Wenn die Gleichung der Kurve durch Polarkoordinaten gegeben iſt, und auch die der Normalen durch dergleichen Koordinaten dargeſtellt werden ſoll; ſo hat man

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1-\varphi_1\right)=-\text{tang}(\alpha_1-\varphi_1),$$

und da nach dem vorhergehenden Paragraphe

$$\cot(\alpha_1-\varphi_1)=\frac{1}{\text{tang}(\alpha_1-\varphi_1)}=\frac{1}{\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{d\varphi_1}$$

iſt,

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1-\varphi_1\right)=-\frac{1}{\frac{1}{\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{d\varphi_1}}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth in die allgemeine Gleichung einer Linie, welche durch den Punkt M geht und ſich unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}+\alpha_1$ gegen die poſitive reelle Axe neigt, und welche nach Gleichung (150)

$$(\varrho)=\frac{\varrho_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1-\varphi_1\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1-\varphi\right)}(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$$

oder nach der Entwickelung des vorhergehenden Paragraphs

$$(\varrho)=\frac{\varrho_1}{\cos(\varphi_1-\varphi)+\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1-\varphi_1\right)\sin(\varphi_1-\varphi)}(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$$

ist; so erhält man nach einiger Reduktion für die Gleichung der Normalen in dem Punkte M, dessen Koordinaten φ_1 und ϱ_1 sind,

$$(\varrho)=\frac{\frac{d\varrho_1}{d\varphi_1}}{\frac{1}{\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{d\varphi_1}\cos(\varphi_1-\varphi)-\sin(\varphi_1-\varphi)}(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1}) \quad \ldots.(244)$$

Vierter Abſchnitt.

Arithmetiſche Darſtellung der verſchiedenen Linien im Raume und Anwendung der Reſultate auf die Geometrie der drei Dimenſionen.

§. 102. Allgemeine Betrachtungen.

Die Mathematik macht es ſich zur Aufgabe, die Beziehungen zu entwickeln, in welchen verſchiedene gleichartige Größen zueinander ſtehen müſſen, wenn dieſelben gewiſſen Bedingungen ein Genüge leiſten ſollen. Bei der wiſſenſchaftlichen Darſtellung dieſer Beziehungen gibt ſie entweder durch das ſinnliche Bild der geometriſchen Konſtruktion oder durch den logiſchen Begriff der arithmetiſchen Formel die Art und Weiſe an, wie ein einfaches Bildungs- oder Veränderungsgeſetz auf die Eine Größe angewendet werden muß, um die andere zu erzeugen. Dieſe Operationen beziehen ſich natürlich immer nur auf die Veränderung derjenigen Eigenſchaft, nach welcher die Größe beſtimmt und gemeſſen iſt, und welche die Gleichartigkeit derſelben mit der geſammten Klaſſe der in Rechnung gebrachten Größen bedingt; es bleibt gleichgültig, welche Veränderungen hierbei gewiſſe andere Eigenſchaften der fraglichen Größe erleiden. Wollte man z. B. nur die Variationen betrachten, welche das Volum irgend eines Stoßes unter gegebenen Bedingungen annimmt; ſo kommt es nicht in Betracht, ob und wie ſich gleichzeitig deſſen Gewicht, Dichtigkeit, Kohäſionskraft, Farbe, Form, Ort und Lage im Raume u. ſ. w. ändert. Die fragliche Größe exiſtirt für die mathematiſche Betrachtung nur der in Rede geſtellten Eigenſchaft nach, und dieſe iſt es allein, durch welche ihr Werth gemeſſen wird. Da ſich nun von der wirklichen Größe alle die übrigen zu ihrem Beſtehen nothwendigen Eigenſchaften nicht trennen laſſen, und auch eine Verände-

rung der Einen Eigenschaft die gleichzeitige Änderung irgend einer anderen unvermeidlich mit sich führen würde; so erkennt man, daß man es bei der mathematischen Rechnung eigentlich gar nicht mit den in der Wirklichkeit existirenden oder existirend gedachten Größen selbst, sondern vielmehr mit rein abstrakten Größen zu thun hat, denen ein allgemeines Bildungsprinzip zum Grunde liegt, welches bei seinen allmähligen durch die Rechnung angedeuteten Operationen Werthe erzeugt, die zueinander in denselben Verhältnissen stehen, wie die fraglichen realen Größen selbst.

Um nun die Gesetze, welchen die Veränderungen dieser Größen unterworfen sind, zu entwickeln, greift der Verstand zuvörderst den Grundcharakter derjenigen Eigenschaft auf, nach welcher die Größen in Betracht gezogen werden sollen, und konstruirt den Begriff von mathematischen Größen, welche einzig und allein jene Eigenschaft als bestimmendes Merkmal an sich tragen. Diese Eigenschaft muß nothwendig von der Art sein, daß sie Größen erzeugt, welche einer Vermehrung und Verminderung fähig sind oder aus Theilen zusammengesetzt werden können, und welche bei der stetigen Anwendung des einfachen Gesetzes der Vermehrung ein System von Werthen liefern, dessen Ausgangspunkt der Begriff des Nichts ist und dessen einzelne Glieder, durch vollkommen stetige Übergänge auseinander hervorgehend, bis ins Unendliche anwachsen könne. Die Konstruktion dieses Systemes entspricht immer der stetigen Bewegung der äußeren Gränze des zuletzt gebildeten Gliedes, einer Gränze, welche begriffsmäßig eine jedes abgeschlossene, für sich bestehende Ganze haben muß.

Wenn jetzt eine wirkliche Größe behuf Unterziehung irgend eines mathematischen Gesetzes der Veränderung gegeben ist; so vergleichen wir dieselbe nur hinsichtlich der an ihr zu betrachtenden Eigenschaft mit den einzelnen Gliedern des obigen Systemes, und indem wir alle übrigen Eigenschaften von derselben abstreifen, reihen wir sie an die Stelle des entsprechenden Gliedes in jenes System selbst ein. Von diesem Gliede nun nimmt die Rechnung ihren Ausgang, und schreibt vor, wie in jener stetigen Reihenfolge von unendlich benachbarten Größenwerthen jenes Glied zu vermehren und zu vermindern sei, oder wie sich die äußere Gränze desselben zu bewegen habe, um ein anderes Glied zu erzeugen, welches gewissen Bedingungen entspricht. Diese Vorschrift wird,

als absolutes Gesetz, durch die arithmetische Formel ausgedrückt, geometrisch wird dieselbe durch eine bildliche Konstruktion wirklich zur Ausführung gebracht.

In §. 28 ist schon bemerkt, daß diejenige Eigenschaft, nach welcher Größen einer mathematischen Betrachtung unterworfen werden sollen, entweder selbst den Charakter der Extensität an sich tragen oder, falls die Größen zu der Kathegorie der intensiven Größen gehörten, doch von der Art sein muß, daß sie durch eine andere Klasse von extensiven oder räumlichen Größen gemessen werden kann, sodaß immer nur Größen von der letzteren Beschaffenheit dem mathematischen Algorithmus dargeboten werden, (vergl. auch §. 55 bis 64). Man sieht also, daß, so verschiedenartig die Größen in anderen Beziehungen auch sein mögen, die von ihnen gebildete mathematische Abstraktion immer nur eine einzige vor der Einbildungskraft existirende Art von Größen erzeugen kann, welche zueinander genau in derselben Beziehung stehen, wie jene wirklichen Größen der fraglichen Eigenschaft nach selbst. Ohne besondere Zugrundelegung einer bestimmten Klasse von wirklichen Größen wird man also im Stande sein, mit den zuletzt erwähnten mathematischen Größen für sich zu operiren und allgemeine Regeln zu entwickeln, welche unbedingt auf eine jede Art von wirklichen Größen Anwendung finden müssen, sobald es sich um eine Veränderung derselben hinsichtlich der fraglichen Eigenschaft handelt. Die zuletzt erwähnten Untersuchungen bilden den Gegenstand der reinen Mathematik, ihr Inbegriff ist gewissermaaßen das Gesetzbuch, nach welchem die angewandte Mathematik verfährt, um in besonderen Fällen Größen aus der Wirklichkeit zu variiren.

Hiernach operirt die reine oder theoretische Geometrie nur mit Größen oder Theilen des absoluten Raumes, ohne alle Berücksichtigung der Art und Weise, wie diese absoluten Raumtheile durch Materie erfüllt sind: es ist Tendenz für diesen Zweig der reinen Mathematik, die Beziehungen, in welchen die räumlichen Größen zueinander stehen, im Raume wirklich zu konstruiren und dem Auge vorzuführen. Die reine oder theoretische Arithmetik dagegen sucht von den Gesetzen, welche die Geometrie den Sinnen darstellt, die abstrakten Begriffe zu bilden oder die Größenbeziehungen denken zu lehren.

Bei der mathematischen Betrachtung der räumlichen und aller übrigen Größen treten nun drei besondere charakteristische Eigenschaften hervor, welche für sich gewürdigt und zur wissenschaftlichen Behandlung fähig gemacht werden müssen.

1) Die erste dieser Eigenschaften ist das Merkmal der Quantität, ein Begriff, der sich nicht weiter definiren läßt, und aus der einfachen Betrachtung der Größen, als aus Theilen bestehende Ganze, hervorgeht (vergl. §. 28). Die Länge einer Linie, die Ausdehnung einer Fläche, das Volum eines Körpers bilden deren Quantität. Demnach könnte man die Eigenschaft der Quantität geometrisch sowol durch die Länge von Linien, wie durch die Ausdehnung von Flächen, wie durch die Volumen von Körpern darstellen: da aber die letzten beiden Arten von räumlichen Größen den Begriff und demnach auch die Quantität der ersteren voraussetzen; so leuchtet ein, daß das Wesen der Quantität absolut einfach und als Grundcharakter aller übrigen mit Quantität begabter Größen nur durch die Länge von Linien geometrisch dargestellt werden kann. Um nun das vorhin erwähnte System von mathematischen Größen, welchen sämmtlich die Eigenschaft der Quantität gemein ist, zu konstruiren, denken wir uns die absolute Linie in ihrer Entstehung, indem wir ihre Gränze, den Punkt, von irgend einem im Raume angenommenen festen Punkte, dem Nullpunkte, aus in Ein und derselben Richtung ins Unendliche fortschreiten lassen. Die einzelnen Abschnitte dieser unbegränzten geraden Linie, welche wir die primäre Axe nennen wollen, bilden die Glieder des obigen Systemes und entsprechen in ihren gegenseitigen Verhältnissen allen Beziehungen, in welchen Größen ihrer Quantität nach nur stehen können. Die arithmetische Repräsentantin dieses Systemes von geometrischen Größen ist die von 0 anhebende bis ins Unendliche fortschreitende Reihe der absoluten Zahlen.

Wollen wir nun verschiedene Linien nur ihrer Länge nach betrachten; so denken wir uns dieselben, von allen sonstigen Eigenschaften befreiet, also unbekümmert um die Richtung und Lage, welche sie im Raume einnehmen, in die vorerwähnte angenommene gerade Linie gestreckt, sodaß ihr Einer Endpunkt mit dem Nullpunkte zusammenfällt, und lassen darauf den andern Endpunkt in der Richtung dieser Linie unter der Leitung irgend einer

Regel variiren. Alle Resultate müssen, wenn sie mit den gegebenen Größen gleichartig sein sollen, innerhalb der fraglichen, auf der Einen Seite durch den Nullpunkt begränzten, auf der anderen Seite unbegränzten Linie bleiben.

Die aus der Betrachtung derartiger nur mit Quantität begabter Größen fließenden Gesetze bilden bei ihrer abstrakten Auffassung den Inbegriff der arithmetischen Untersuchungen über das Wesen der absoluten Zahlen.

Außer der absoluten Länge der Linien im Raume erkennen wir an denselben die Eigenschaft der Richtung. Dieselbe zerfällt jedoch, wenn sie als einfaches Merkmal an den Größen ausgeprägt werden soll, noch in zwei andere, welche voneinander unabhängig sind, und demnach einer besonderen Betrachtung und einer besonderen mathematischen Darstellung bedürfen. Man unterscheidet nämlich die Richtung der Linien

2) nach der einfachen Größe ihrer Abweichung von der Richtung der obigen primären Axe, ohne Berücksichtigung der anderweitigen symmetrischen Lagen um jene Axe herum. Das Wesen der Richtung trägt, wenn es als Größe betrachtet werden soll, den Charakter der Extensität noch nicht an sich, und muß demnach, um einer mathematischen Behandlung fähig zu werden, zuvörderst auf extensive Größen bezogen werden. Dies geschieht durch den Begriff von der Größe des Winkels oder des Kreisbogens, welchen irgend eine gegebene Richtung mit einer anderen einschließt; hierdurch wird die Abweichung der ersteren Richtung von der letzteren gemessen.

Um jetzt wieder das obige allgemeine Größensystem zu konstruiren, deren einzelne Glieder allen möglichen Werthen der Abweichung entsprechen, denken wir uns die primäre Axe um den Nullpunkt in irgend einer im Raume angenommenen Ebene, welche die Grundebene heiße, im Kreise herumgedrehet, und diese Drehung ins Unendliche fortgesetzt. Hierdurch entstehen alle mathematischen Größen, welchen das Merkmal der Winkelverschiedenheit, das wir jetzt ihre Deklination nennen wollen, zukommt. Verbinden wir mit dieser Drehung noch den Begriff des Fortschrittes eines Punktes in der primären Axe; so erhalten wir ein System von Größen, welche zugleich die beiden Merkmale der absoluten Quantität und der Deklination in allen denk-

baren Modifikationen an sich tragen. Arithmetisch wird die Eigenschaft der Deklination durch einen Koeffizienten ausgeprägt, mit welchem die quantitativen Zahlzeichen behaftet werden. Derselbe ergibt sich, wie wir im zweiten Abschnitte gesehen haben, durch logische Schlußfolgerungen daraus, daß man diejenigen Linien, welche durch eine halbe Umdrehung der primären Axe entstehen, und deren Quantität sich in einer der Richtung der primären Linien direkt entgegengesetzten Richtung erzeugt, mit dem Faktor -1 belegte, und negative Größen nannte, während die ersteren positive Größen hießen. Bezeichnen wir jenen Koeffizienten, welcher sich nur auf die Größe der Winkelabweichung oder der Deklination zweier Linien bezieht, und welcher sich in der Form

$$(-)^m = e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$$

darstellt, worin $m\pi = \varphi$ die Größe der Deklination angibt, jetzt mit dem spezielleren Namen des Deklinationskoeffizienten.

Hierbei muß noch bemerkt werden, daß die in der primären Axe selbst liegenden Längen die Deklination null besitzen: alle übrigen Deklinationen werden nur dadurch erzeugt, daß sich die primären Längen stets nach Ein und derselben Seite um den Nullpunkt herum bewegen. Die Werthe dieser verschiedenen Deklinationen φ werden also stets absolute Größen sein, wie die Längen oder Quantitäten dieser Linien selbst, zwischen denen es noch keinen Gegensatz gibt, wie zwischen den positiven und negativen primären Linien. Eine Deklination von 320° z. B. würde also nicht, wie eine negative Deklination von $-40°$ anzusehen sein. Ebensowenig, wie wir negative Linien kannten, als nur der einfache Begriff der Quantität oder des Fortschrittes in einer geraden Linie nach Ein und derselben Richtung gegeben war, ebenso wenig ist uns jetzt die Vorstellung von Linien mit einer negativen Deklination klar. Nachdem wir jedoch gesehen haben, daß sich die negativen, d. h. die durch eine halbe Umdrehung der positiven Linien erzeugten oder mit einer Deklination von 180° begabten Linien auch dadurch hervorbringen lassen, daß wir das Bildungsgesetz der einfachen Quantität oder Längenerstreckung an den primären Linien umkehren, werden wir auch zu dem Schlusse berechtigt sein, daß es Linien mit negativer Deklination

gibt, welche dadurch erhalten werden, daß wir das Gesetz der Drehung an den primären Linien umkehren oder die primäre Axe nach einer der früheren entgegengesetzten Seite in derselben Ebene um den Nullpunkt herumbewegen. Es leuchtet jedoch ein, daß eine solche Betrachtungsweise, wenn wir die vorstehenden Prinzipien konsequent durchführen wollen, unsystematisch ist; denn streng genommen, dürfte man von negativen Linien nicht eher sprechen, als der Begriff der Drehung oder Deklination festgestellt ist, weil die Forderung einer vollständigen Umkehrung des Gesetzes des Fortschrittes in gerader Linie die Möglichkeit einer theilweisen Veränderung dieses Gesetzes oder des Fortschrittes in einer gegen die primäre Axe geneigten Linie nothwendig voraussetzt. Ebenso würde die Forderung der vollständigen oder direkten Umkehrung des Gesetzes der Drehung in einer Ebene behuf Erzeugung der Linien mit negativer Deklination die Möglichkeit einer theilweisen Veränderung dieses Gesetzes, wodurch die totale Umkehrung allmählig erreicht werden könnte, voraussetzen. Eine theilweise Veränderung des zuletzt erwähnten Gesetzes der Drehung in der Grundebene würde aber auf den Begriff der Drehung in einer Ebene führen, welche gegen die Grundebene geneigt ist und durch die primäre Axe geht. Da wir jedoch Linien, welche in solchen Ebenen liegen, in ihren gegenseitigen Beziehungen noch gar nicht kennen, und nur das Merkmal der Winkelabweichung oder der Deklination gegen die primäre Axe an ihnen ausgeprägt haben; so weisen wir die letztere Betrachtungsweise vor der Hand zurück, und habe es nur mit Linien zu thun, deren Deklination eine absolute Größe ist, die von 0 bis ins Unendliche variiren kann.

Sobald wir nun die Linien im Raume nur ihrer Quantität und ihrer Deklination nach betrachten wollen, denken wir uns dieselben, ohne Berücksichtigung ihrer sonstigen Lagen gegeneinander, als Glieder in das obige allgemeine System gefügt, also sämmtlich in Ein und derselben Ebene so niedergelegt, daß ihre Anfangspunkte mit dem Nullpunkte zusammenfallen und ihre Richtungen mit der primären Axe die ihnen zukommenden Deklinationswinkel einschließen, und variiren dieselben darin nach den Regeln, welche der Bildung dieses Systemes entsprechen. Die geometrischen Untersuchungen, welche sich an die Kombinationen

derartiger Größen knüpfen, bilden den Gegenstand der Planimetrie; die Operationen der Arithmetik, welche die hierbei sich ergebenden Beziehungen begriffsmäßig darstellen, bewegen sich alsdann auf dem Felde der positiven und negativen reellen und imaginären Zahlen. Rein imaginär heißen dabei solche Linien, deren Richtung auf der primären Axe perpendikular steht. Da die letzteren Linien nicht minder in der Wirklichkeit existiren, wie die ersteren, also ebensowol auf den Namen der reellen Größen Anspruch haben, wie diese; so wollen wir dieselben im Folgenden mit der Bezeichnung der sekundären Linien, resp. Zahlen, belegen, und die auf der primären Axe im Nullpunkte perpendikular stehende, in der Grundebene liegende Linie die sekundäre Axe nennen.

3) Gehen wir endlich dazu über, die Linien im Raume, wenn wir uns dieselben in den ihnen entsprechenden Richtungen an den Nullpunkt getragen denken, ganz im Allgemeinen in ihren gegenseitigen Quantitäts- und Richtungsverhältnissen zu betrachten; so erkennen wir, daß alle Linien von gleicher Quantität und Deklination gegen die primäre Axe noch drittens hinsichtlich ihrer Lage gegen die Grundebene unendlich verschieden sein können. Diese Verschiedenheit der Lage kann offenbar durch den Winkel gemessen werden, unter welchem sich eine durch die gegebene Linie und die primäre Axe gehende Ebene gegen die Grundebene neigt. Diesen Neigungswinkel wollen wir die Inklination der fraglichen Linie nennen. Denkt man sich die Grundebene mit allen in ihr liegenden Linien um die primäre Axe herumgedrehet; so erhält man offenbar das allgemeinste System von mathematischen Großen, in welchen eine jede Linie im Raume hinsichtlich ihrer Quantität, Deklination und Inklination oder hinsichtlich ihrer Länge und Richtung eine Stelle findet.

Die geometrischen Untersuchungen über die verschiedenen Beziehungen, welche zwischen den Größen von der zuletzt erwähnten generellen Art stattfinden, gehören der Stereometrie an. Es kommt jetzt darauf an, die Prinzipien zu entwickeln, nach welchen die Arithmetik derartige Größen in ihr Bereich zu ziehen und die ihren gesetzmäßigen Veränderungen entsprechenden Operationen auszuführen vermag. Die hierauf abzweckenden Betrachtungen werden den Gegenstand des vorliegenden Abschnittes ausmachen.

§. 103. Der Inklinationskoeffizient für eine Drehung von $\varkappa = 180°$ um die primäre Axe.

Wenn wir von der absoluten Längeneinheit λ ausgehen, um darauf alle verschiedenen im Raume möglichen Linien, sowol ihrer Quantität, wie ihrer Richtung nach, zu beziehen; so erkennen wir zuvörderst, daß wenn a das arithmetische Zeichen für irgend eine absolute Zahl ist, dasselbe als Faktor zu der Einheit λ tritt, um in der Formel $a\lambda$ eine Linie darzustellen, welche durch geradlinigen Fortschritt um a Längeneinheiten in der Richtung der primären Axe vom Nullpunkte aus entstanden ist. Wenn wir die Größe a als eine von 0 bis ∞ Veränderliche ansehen; so stellt $a\lambda$ eine jede primäre Linie oder alle Abschnitte der nach der Einen Seite unbegränzten primären Axe dar.

Bezeichnen wir mit D irgend einen Deklinationskoeffizienten für die Deklination φ; so haben wir ferner gesehen, daß derselbe als Faktor zu dem Ausdrucke $a\lambda$ tritt, um in der Formel $Da\lambda$ alle Linien darzustellen, deren Richtungen in der Grundebene liegen und sich unter dem Winkel φ gegen die primäre Axe neigen, welche also erhalten werden, wenn wir die ganze primäre Axe mit sämmtlichen in ihr liegenden absoluten Längen in der Grundebene um den Winkel φ nach einer bestimmten Seite um den Nullpunkt herumdrehen. Denken wir uns φ als variabel von 0 bis ∞; so wird der Ausdruck $Da\lambda$ alle in der Grundebene liegenden Linien bezeichnen, welche durch einen beliebigen geradlinigen Fortschritt vom Nullpunkte aus und durch eine beliebige Drehung um den Nullpunkt herum nach derselben Seite entstanden sind.

Sollen nun diejenigen Linien, welche in einer Ebene liegen, die gegen die Grundebene unter dem Winkel ψ geneigt ist und durch die primäre Axe geht, welche also erhalten werden, wenn sich die Grundebene mit allen in ihr liegenden Linien um den Inklinationswinkel ψ um die primäre Axe drehet, nach demselben Prinzipe dargestellt werden; so folgt, daß dieselben erhalten werden müssen, wenn man dem Ausdrucke $Da\lambda$ einen gewissen Koeffizienten J, welcher eine Funktion von ψ ist und der Inklinationskoeffizient heißen möge, hinzufügt, sodaß $JDa\lambda$ irgend eine Linie von der absoluten Länge $a\lambda$ bezeichnet, die in einer durch die primäre Axe gehenden, unter dem Inklinations-

winkel ψ gegen die Grundebene geneigten Ebene liegt und gegen die primäre Are die Deklination φ besitzt.

Sowie es nur gleichgültig war, ob man die Längeneinheit λ zuerst mit dem Faktore a, welcher ihre Quantität mißt, und dann mit dem Deklinationskoeffizienten D behaftete, oder umgekehrt, erst mit dem Deklinationskoeffizienten D, um zuerst ihre Richtung um den Winkel φ zu ändern, und dann mit dem Faktor a, um in dieser neuen Richtung ihre Quantität durch geradlinigen Fortschritt zu erzeugen; ebenso muß es nun hier gleichgültig sein, in welcher Reihenfolge man die drei Koeffizienten a, D und J auf die Einheit λ anwendet, um die dadurch angedeuteten Operationen in der Einen oder anderen Reihenfolge an ihr zu vollziehen. In der That erkennt man leicht, daß es in geometrischer Bedeutung ganz indifferent ist, ob man zuerst eine Drehung der primären Are um den Nullpunkt in der Grundebene um den Winkel φ und dann eine Drehung dieser Ebene um die primäre Are um den Winkel ψ, oder umgekehrt, erst eine gleiche Drehung der Grundebene um die primäre Are und alsdann eine Drehung der Letzteren um den Nullpunkt in der gegen die Grundebene geneigten Ebene um den Winkel φ vornimmt.

Wie es nun ferner behuf Herstellung des Faktors a eine arithmetische Einheit geben mußte, um dessen verschiedene Werthe darauf zu beziehen, eine Einheit, welche gleich der absoluten Zahl Eins (1) ist, und wie ebenso behuf Herstellung des Deklinationskoeffizienten D eine ähnliche Einheit in die arithmetischen Begriffe eingeführt werden mußte, welche in dem Zeichen (—) bestand, das eine halbe Umdrehung der primären Are um den Nullpunkt bezeichnete; in gleicher Weise ist es erforderlich, daß behuf Darstellung des Inklinationskoeffizienten J zuvörderst ein arithmetisches Zeichen eingeführt werde, auf welches sich die verschiedenen Werthe desselben als Maaßeinheit beziehen lassen.

Ein solches Zeichen ist bis jetzt nicht vorhanden, da man es nicht versucht hat, die Größen in den vorstehenden, allgemeinen Beziehungen zueinander zu betrachten. Wählen wir daher, analog dem Zeichen —, das Zeichen ÷, um dadurch anzudeuten, daß die damit behafteten, vorher in der Grundebene liegenden Linien eine halbe Umdrehung um die primäre Are erlitten, also eine Inklination von $\psi = \pi$ oder 180° besitzen, sodaß dieselben wiederum

mit der nach allen Seiten erweiterten Grundebene zusammenfallen, sich aber von den ursprünglich in dieser Ebene liegenden noch dadurch unterscheiden, daß eine etwaige fernere Multiplikation mit einem Deklinationskoeffizienten D' eine Drehung derselben in der Grundebene um den Nullpunkt nach einer Seite bewirkt, welche der anfänglich angenommenen gerade entgegengesetzt ist. Dieses Zeichen ÷, welches eine halbe Umdrehung irgend einer Linie um die primäre Axe bezeichnen soll, und demnach mit dem Zeichen —, welches eine halbe Umdrehung in einer durch die primäre Axe gehenden Ebene um den Nullpunkt bezeichnet, nahe verwandt ist, könnte man, da die Richtung der dadurch angedeuteten Drehung rechtwinklig auf der durch das Zeichen minus bewirkten steht, was an eine Beziehung erinnert, wie sie zwischen den Richtungen der goniometrischen Funktionen sinus und cosinus oder tangens und cotangens stattfindet, füglich cominus nennen, da es hierbei durchaus nicht auf eine streng grammatikalische Ableitung, sondern lediglich auf ein charakteristisches Wort ankommt, welches sich bei dem wissenschaftlichen Gebrauche dazu eignet, einem gegebenen Begriffe zur äußeren Hülle zu dienen.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß ÷1 der Inklinationskoeffizient für alle Linien ist, welche eine Drehung von $\varkappa = 180^\circ$ um die primäre Axe erlitten haben. Da einer abermaligen Drehung der mit dem Koeffizienten ÷1 behafteten Linien von 180° um die primäre Axe eine nochmalige Multiplikation mit ÷1 entspricht, diese Linien aber mit den anfänglichen genau zusammenfallen; so hat man offenbar

$$(\div 1) \times (\div 1) = (\div 1)^2 = +1.$$

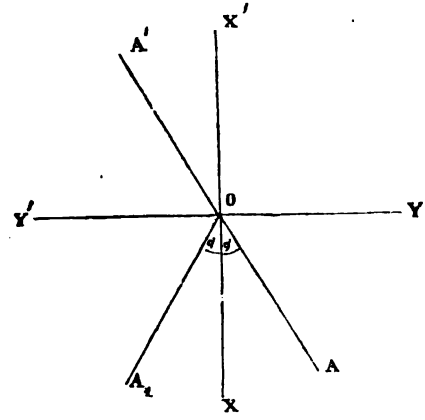
Trotz der nahen Verwandtschaft der Bedeutung des Zeichens ÷1 mit der des Zeichens —1 erkennt man leicht folgende wesentliche Unterschiede zwischen den Wirkungen beider auf die damit behafteten Größen.

Wenn irgend eine Linie der Grundebene mit dem Deklinationskoeffizienten —1 behaftet wird; so erhält man eine andere Linie mit direkt entgegengesetzter Richtung, in welcher ein geradliniges Vorwärtsschreiten oder eine Quantitätsvermehrung einem Rückwärtsschreiten oder einer Quantitätsverminderung in der Richtung der ersteren Linie entspricht. Sollen daher zwei derge-

ſtalt entgegengeſetzte Linien durch eine Operation vereinigt werden, welche ein geradliniges Fortſchreiten in der Richtung und um die Quantität der Einen vom Endpunkte der anderen aus verlangt, wie Dies bei der Addition der Fall iſt; ſo leuchtet ein, daß ſich bei der Summenbildung das Beſtreben des äußeren Endpunktes des erſten Summands nach Fortſchritt in einer gewiſſen Richtung in ein Beſtreben nach Fortſchritt in direkt entgegengeſetzter Richtung verwandelt, und daß hierbei die bei der Entſtehung des erſten Summands durch geradlinige Bewegung eines Punktes geſchehenen Operationen allmählig wieder vernichtet werden.

Zwiſchen den mit dem Deklinationskoeffizienten $\div 1$ behafteten und den nicht mit demſelben behafteten Linien beſteht übrigens im Allgemeinen keineswegs die vorſtehende Beziehung, welche zwiſchen den negativen und poſitiven Linien Ein und derſelben Richtung obwaltet. Man erkennt, daß wenn a eine abſolute Länge bezeichnet, $+a$ und $\div a$ immer zwei Linien von der Länge a darſtellen, welche beide in der Richtung der poſitiven primären Axe liegen, und demnach bei ihrer Addition eine Linie von der abſoluten Länge $2a$ erzeugen müſſen, welche ebenfalls in der Richtung der poſitiven primären Axe liegt. Ebenſo ſind $-a$ und $\div -a$ zwei in der Richtung der negativen primären Axe liegende Linien von der Länge a. Dagegen ſtellen $+a\sqrt{-1}$ und $\div a\sqrt{-1}$ zwei Linien dar, von denen die erſtere mit der Richtung der poſitiven und die letztere mit der Richtung der negativen ſekundären Axe zuſammenfällt, ſodaß dieſe beiden Größen, wenn ſie als Summanden zuſammentreten, ſich gerade ſo zueinander verhalten, wie die beiden Größen $+a\sqrt{-1}$ und $-a\sqrt{-1}$ es thun würden.

Außerdem erhellet, daß wenn (a) irgend eine Linie der Grundebene, z. B. (OA), von der Deklination $Aox=\alpha$ darſtellt, bei der Multiplikation dieſer Linie mit einer anderen Linie (b) der Grundebene von der Deklination β die Richtung des Produktes $(a)\times(b)$ erhalten wird, wenn man die Richtung von (OA) nach derjenigen Seite, nach welcher die Linien mit poſitiven Deklinationen aus der primären Axe erzeugt werden, d. i. von X über Y um den Winkel β weiterdrehet. Ebendaſſelbe findet ſtatt, wenn man für $(a)=(OA)$ die direkt entgegengeſetzte Linie $-(a)=(OA')$ ſubſtituirt. Setzte man jedoch an die Stelle von



(*a*) die mit dem Inklinationskoeffizienten für eine Inklination von 180° behaftete Linie $\div(a)=(OA_1)$; so würde die Richtung des Produktes $\div(a)\times(b)$ erhalten werden, indem man die Richtung von (OA_1) um den Winkel β nach der Seite XY' herumdrehete, welche der ursprünglichen von X über Y gerade entgegengesetzt ist.

Wenn demnach auch $\div a$ mit $+a$, $\div -a$ mit $-a$ und $\div a\sqrt{-1}$ mit $-a\sqrt{-1}$, worin a eine absolute Länge bezeichnet, gleichbedeutend ist, sobald man diese Linien nur ihrer Quantität und Richtung nach, also als **Summanden**, betrachtet; so besteht zwischen denselben doch noch ein wesentlicher Unterschied, sobald dieselben auch hinsichtlich des ihnen zu Grunde liegenden Gesetzes der **Drehung**, nach welchem sie aus der primären Richtung entstanden sind, oder als **Faktoren** in Betracht gezogen werden. So würde z. B. $-a\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=+a$, dagegen würde $\div a\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\div -a=-a$ sein.

§. 104. Der Inklinationskoeffizient für eine Drehung von $\frac{\pi}{2}=90°$ um die primäre Axe. — Tertiäre Axe.

Bezeichnen wir jetzt den Inklinationskoeffizienten derjenigen Linien, welche durch eine Drehung der in der Grundebene liegenden Linien um 90° um die primäre Axe entstanden sind, welche also in einer durch die primäre Axe gehenden und auf der

Grundebene perpendikular stehenden Ebene liegen, mit J_1; so erhält man für irgend eine solche Linie den arithmetischen Ausdruck $J_1(a)$. Da nun eine fernere Drehung dieser Linien um die primäre Axe um den Winkel von 90° einer abermaligen Multiplikation derselben mit dem Faktor J_1 entspricht, diese Linien alsdann aber wiederum in die Grundebene fallen und durch $\div(a)$ dargestellt werden; so hat man

$$J_1^{\,2}(a) = \div(a);$$

mithin für den fraglichen Inklinationskoeffizienten

$$J_1 = (\div 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\div 1}.$$

Nach dreimaliger Multiplikation der Linie (a) mit dem Faktor J_1 erhält man für die Linien von einer Inklination $= \frac{3\pi}{2} = 270°$

$$J_1^{\,3}(a) = (\div 1)^{\frac{3}{2}}(a) = \div\sqrt{\div 1}\,(a)$$

oder für den fraglichen Inklinationskoeffizienten dieser Linien, welche in der unterhalb der Grundebene erweiterten vorhin erwähnten Ebene liegen,

$$J_1^{\,3} = (\div 1)^{\frac{3}{2}} = \div\sqrt{\div 1}.$$

Wenn man die in der positiven sekundären Axe OY liegenden Linien von der Form $a\sqrt{-1}$, worin a eine absolute Länge bezeichnet, mit dem Inklinationskoeffizienten $J_1 = \sqrt{\div 1}$ behaftet; so erhält man für diejenigen Linien, welche in einer auf der Grundebene im Nullpunkte perpendikular stehenden Axe OZ liegen, den Ausdruck

$$\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}.a,$$

für deren Richtung $\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$ der charakteristische Koeffizient ist. Der entsprechende Koeffizient für eine in der rückwärts gerichteten Verlängerung von OZ liegenden Linie würde nach dem Vorstehenden

$$\div\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

sein, und man sieht, daß sich die mit den Faktoren $\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$

und $\div\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$ behafteten Linien ihrer Richtung nach gerade so entgegengesetzt sind, wie die mit den Faktoren $\sqrt{\div 1}$ und $\div\sqrt{\div 1}$ und auch wie die mit den Faktoren $+$ und $-$ behafteten Linien.

Die auf der Grundebene im Nullpunkte perpendikular stehende Axe ZZ' wollen wir die tertiäre Axe nennen, von welcher OZ der positive und OZ' der negative Theil ist.

Eine viermalige Multiplikation irgend einer Linie mit dem Inklinationskoeffizienten $\sqrt{\div 1}$ für eine Viertelumdrehung um die primäre Axe erzeugt natürlich wieder eine in der Richtung der anfänglichen Linie liegende Linie von derselben Länge, da $\div\sqrt{\div 1}\times\sqrt{\div 1}=\div(\div 1)=+1$ ist.

§. 104a. Der Inklinationskoeffizient für irgend eine Drehung um die primäre Axe.

Bei der Darstellung der Inklinationskoeffizienten für beliebige Drehungen um die primäre Axe aus dem Koeffizienten $\div 1$ für eine halbe Axenumdrehung lassen sich genau dieselben Prinzipien in Anwendung bringen, wie sie im zweiten Abschnitte (§. 35 ff.) bei der Entwickelung der Deklinationskoeffizienten für beliebige Drehungen um den Nullpunkt in der Grundebene aus dem Koeffizienten -1 für eine halbe Kreisdrehung angewendet sind. Es leuchtet ein, daß wenn J den Inklinationskoeffizienten für eine Inklination von $\psi=n\pi$ bezeichnet,

$$J^{\frac{1}{n}}=\div 1, \text{ also}$$
$$J=(\div 1)^n$$

sein muß. Da aber das Zeichen $(\div 1)^n$ hier ebensowenig nach den allgemeinen Regeln der Potenzrechnung reduzirt werden darf, wie es im zweiten Abschnitte mit dem Zeichen $(-1)^n=(-)^n$ geschehen durfte, sodaß man zwar, wenn n ein Bruch ist, denselben auf seine kleinste Benennung bringen, auch wenn $n<2$, also z. B. $=2+p$ ist, $(\div 1)^n=(\div 1)^{2+p}=(\div 1)^2(\div 1)^p=(\div 1)^p$ setzen, ferner wol

$$(\div 1)^{\frac{p}{q}}=\left[(\div 1)^{\frac{1}{q}}\right]^p,$$

aber durchaus nicht ohne Einschränkung

$$(\div 1)^{\frac{p}{q}} = \left[(\div 1)^{p}\right]^{\frac{1}{q}},$$

z. B. nicht

$$(\div 1)^{\frac{2}{2}} = \left[(\underset{\sim}{\div 1})^{2}\right]^{\frac{1}{2}} = (\div 1)^{\frac{1}{2}} = \div 1,$$

schreiben kann: so wollen wir den Inklinationskoeffizient, analog dem Deklinationskoeffizienten $D=(-)^{a}$, durch

$$J=(\div)^{a}$$

darstellen, um dadurch auf dessen Bedeutung als Zeichen besser aufmerksam zu machen. So gut es für $(-1)^{\frac{p}{q}}$ q verschiedene Werthe gab, wird es auch für $(\div 1)^{\frac{p}{q}}$ q verschiedene Werthe geben, von welchen immer nur ein einziger und zwar aus der sukzessiven Reihenfolge derselben derjenige zu nehmen ist, welcher die geringste Inklination gegen die Grundebene bezeichnet.

Zuvörderst leuchtet ein, daß der absolute Werth des Koefizienten J gleich 1, oder dessen Länge, wenn man sich denselben als Linie denkt, gleich der Längeneinheit sein müsse, da dessen Wirkung auf irgend eine damit behaftete Linie durchaus keine Längenveränderung, sondern bloß eine Drehung oder Richtungsveränderung bewirken darf.

Außerdem erhellet, daß wenn a irgend eine positive oder negative primäre Linie darstellt, Ja immer eine mit a sowol der Länge, wie der Richtung nach zusammenfallende Linie bezeichnen wird, welche also mit dieser identisch ist, sobald dieselbe nur als additive oder subtraktive Größe bei irgend einer Operation in Betracht gezogen wird; als Faktoren gebraucht, äußern jedoch die Größen a und Ja bei der Bildung eines Produktes wegen der durch dieselben vorgeschriebenen Drehungen in verschiedenen Ebenen auch eine verschiedene Wirkung, welche zwar auf die Quantität oder die Länge des Produktes keinen Einfluß hat, wol aber die Lage des Letzteren im Raume bedingt.

Stellt man nun irgend eine in der Grundebene liegende Linie von der Deklination α als die Summe einer primären und einer sekundären Linie, nämlich durch die bekannte Formel

$$(a) = a(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1}) = a\cos\alpha + a\sin\alpha . \sqrt{-1}$$

dar; so leuchtet ein, daß bei der Drehung der Linie (a) um den Winkel ψ um die primäre Axe der primäre Theil $a\cos\alpha$ seiner Länge und Richtung nach unverändert bleiben und sich nur so weit um sich selbst drehen wird, daß er ein Bestreben hat, bei einer etwaigen Multiplikation mit einem Deklinationskoeffizienten in einer Ebene zu rotiren, welche sich unter dem Winkel ψ gegen die Grundebene neigt. Hieraus folgt, daß der primäre Theil der inklinanten Linie $J.(a)$ oder $Ja(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1})$ durch

$$Ja\cos\alpha$$

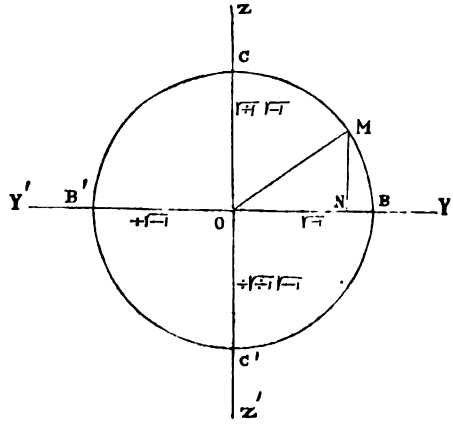
dargestellt werden wird.

Der sekundäre Theil $a\sin\alpha . \sqrt{-1}$ der Linie (a), welcher auf der primären Axe rechtwinklig steht, drehet sich nun bei der Drehung von (a), wie eine jede in der sekundären Axe liegende Linie, ebenfalls um den Winkel ψ um die primäre Axe, und wird daher in

$$Ja\sin\alpha . \sqrt{-1}$$

übergehen.

Betrachten wir nun die durch die sekundäre und tertiäre Axe gehende, auf der Grundebene perpendikular stehende Ebene YZ mit allen in ihr liegenden Linien; so wissen wir schon aus den früheren Untersuchungen, daß wenn die Länge des Halbmessers OB des um O beschriebenen Kreises BCB'C' gleich



der Längeneinheit ist, die Linie (OB) sowol ihrer Länge, wie ihrer Richtung nach durch $\sqrt{-1}=(\div 1)^0\sqrt{-1}$, die (OC) durch $\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}=(\div)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$, die (OB′) durch $\div\sqrt{-1}=(\div)^1\sqrt{-1}$ und die (OC′) durch $\div\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}=(\div)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-1}$ und eine jede andere unter dem Winkel $\mathbf{MOB}=\psi=\alpha\pi$ gegen die Axe OY geneigte Linie (OM) von derselben Länge durch

$$(\mathbf{OM}=\mathbf{J}\sqrt{-1}=(\div)^{\alpha}\sqrt{-1}$$

dargestellt wird.

Man erkennt leicht, daß die in der Ebene YZ liegenden Linien unter sich sowol der Länge, wie der Richtung nach genau in denselben Beziehungen stehen, wie die Linien der Grundebene XY, und daß man die ersteren aus den letzteren unmittelbar erhalten würde, wenn man in diesen zuvörderst das Zeichen $\div$ an die Stelle des Zeichens — setzte, indem man demselben, dem Zeichen + gegenüber, genau dieselbe subtraktive Bedeutung beilegte, wie dem Zeichen —, und wenn man alsdann eine jede so erhaltene Zahl mit dem Faktor $\sqrt{-1}$ multiplizirte. Bezeichnet man daher die Ausdrücke $\cos\psi$ und $\sin\psi$ unter der Voraussetzung, daß in ihnen das Zeichen — mit dem Zeichen $\div$ vertauscht und letzteres bei der Vereinigung der Glieder gerade so gebraucht sei, wie das Zeichen —, resp. mit

$$\overset{\cdot\cdot}{\cos}\psi \text{ und } \overset{\cdot\cdot}{\sin}\psi;$$

so kann man für den Inklinationskoeffizienten J offenbar

$$\mathbf{J}=(\div)^{\alpha}=e^{\psi\sqrt{\div 1}}=\overset{\cdot\cdot}{\cos}\psi+\overset{\cdot\cdot}{\sin}\psi.\sqrt{\div 1} \qquad \ldots.(1)$$

setzen.

Die Werthe der $\overset{\cdot\cdot}{\cos}$ und $\overset{\cdot\cdot}{\sin}$ der verschiedenen Inklinationswinkel stehen offenbar in demselben Verhältnisse zueinander, wie die Werthe der cos und sin der verschiedenen Deklinationswinkel, und wenn man in den Formeln des §s 46 und 47 $\div$ statt — substituirt, und mit jenem Zeichen ebenso operirt, wie mit letzterem; so behalten dieselben ohne Einschränkung Gültigkeit. So hat man z. B.

$$\left.\begin{aligned} \underset{\cdot\cdot}{\cos} 0 &= 1, & \underset{\cdot\cdot}{\sin} 0 &= 0, \\ \underset{\cdot\cdot}{\cos}\frac{\pi}{2} &= 0, & \underset{\cdot\cdot}{\sin}\frac{\pi}{2} &= 1, \\ \underset{\cdot\cdot}{\cos}\pi &= \div 1, & \underset{\cdot\cdot}{\sin}\pi &= 0, \\ \underset{\cdot\cdot}{\cos}\frac{3\pi}{2} &= 0, & \underset{\cdot\cdot}{\sin}\frac{3\pi}{2} &= \div 1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(2)$$

und wenn $\psi < \frac{\pi}{2}$ ist,

$$\left.\begin{aligned} \underset{\cdot\cdot}{\cos}\psi &= \cos\psi, & \underset{\cdot\cdot}{\sin}\psi &= \sin\psi, \\ \underset{\cdot\cdot}{\cos}\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right) &= \div\sin\psi, & \underset{\cdot\cdot}{\sin}\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right) &= \cos\psi, \\ \underset{\cdot\cdot}{\cos}(\pi+\psi) &= \div\cos\psi, & \underset{\cdot\cdot}{\sin}(\pi+\psi) &= \div\sin\psi, \\ \underset{\cdot\cdot}{\cos}\left(\frac{3\pi}{2}+\psi\right) &= \sin\psi, & \underset{\cdot\cdot}{\sin}\left(\frac{3\pi}{2}+\psi\right) &= \div\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(3)$$

allgemein

$$\left.\begin{aligned} \underset{\cdot\cdot}{\cos}(\psi_1 \pm \psi_2) &= \underset{\cdot\cdot}{\cos}\psi_1 \underset{\cdot\cdot}{\cos}\psi_2 \mp \underset{\cdot\cdot}{\sin}\psi_1 \underset{\cdot\cdot}{\sin}\psi_2, \\ \underset{\cdot\cdot}{\sin}(\psi_1 \pm \psi_2) &= \underset{\cdot\cdot}{\sin}\psi_1 \underset{\cdot\cdot}{\cos}\psi_2 \pm \underset{\cdot\cdot}{\cos}\psi_1 \underset{\cdot\cdot}{\sin}\psi_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(4)$$

§. 105. Bemerkungen über den Gebrauch des Inklinationskoeffizienten.

Irgend eine Linie (OM) der Ebene YZ wird nach den Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphes durch

$$(OA) = a \sin\alpha \left(\underset{\cdot\cdot}{\cos} n + \underset{\cdot\cdot}{\sin}\psi . \sqrt{\div 1}\right)\sqrt{-1}$$

dargestellt. Da bei allen in dieser Ebene liegenden Linien, d. h. bei allen Linien, welche aus dem Produkte einer sekundären Linie in einen Inklinationskoeffizienten bestehen, das Zeichen $\div$ eine dem Zeichen $-$ ganz gleiche Bedeutung hat, sobald diese Linien nur als additive oder subtraktive Größen in Betracht kommen; so geht aus dem Früheren hervor, daß man in dem vorstehenden Ausdrucke auch die Multiplikation mit dem Faktor $a \sin\alpha \sqrt{-1}$

an den beiden Theilen des Inklinationskoeffizienten wirklich vollziehen, und

$$(OM) = a \sin\alpha \overset{\cos}{..}\psi \sqrt{-1} + a \sin\alpha \overset{\sin}{..}\psi \sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (5)$$

setzen kann, wodurch (OM), ähnlich den Linien der Grundebene, als aus zwei Theilen bestehend dargestellt wird, von denen der erstere

$$(ON) = a \sin\alpha \overset{\cos}{..}\psi \sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (6)$$

in der Richtung der sekundären Axe Y'Y liegt und die absolute Länge $a \sin\alpha \cos\psi$ besitzt, und der letztere

$$(NM) = a \sin\alpha \overset{\sin}{..}\psi \sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (7)$$

in der Richtung der tertiären Axe Z'Z liegt und die absolute Länge $a \sin\alpha \sin\psi$ besitzt.

Wenn aber der Inklinationskoeffizient $J = \overset{\cos}{..}\psi + \overset{\sin}{..}\psi . \sqrt{\div 1}$ in eine primäre Zahl a multiplizirt ist, ist es nach dem Obigen durchaus unzulässig, in dem Ausdrucke

$$a(\overset{\cos}{..}\psi + \overset{\sin}{..}\psi \sqrt{\div 1})$$

die Multiplikation mit a auszuführen, und denselben $= a \overset{\cos}{..}\psi + a \overset{\sin}{..}\psi \sqrt{\div 1}$ zusetzen, da in dem letzteren Ausdrucke sowol der erstere, wie der letztere Theil eine in der primären Axe liegende Linie resp. von der absoluten Länge $a \cos\psi$ und $a \sin\psi$, die Summe beider also eine in derselben Axe liegende Linie von der absoluten Länge $a \cos\psi + a \sin\psi$ darstellen würde, was der Bedeutung des gegebenen Ausdruckes ganz und gar widerspricht.

§. 106. Der vollständige Richtungskoeffizient.

Aus §. 103 geht hervor, daß wenn a irgend eine absolute Länge (welche dort mit $a\lambda$ bezeichnet ist, worin man unter a eine absolute Zahl und unter λ die Längeneinheit verstand), D irgend einen Deklinationskoeffizienten und J irgend einen Inklinationskoeffizienten darstellt, eine beliebige Linie im Raume, deren Länge $= a$ ist, und welche in einer durch die primäre Axe gehenden und unter dem Winkel ψ gegen die Grundebene sich nei-

genden Ebene liegt, und welche außerdem mit der primären Axe den Winkel α einschließt, allgemein durch

$$(a) = a\,\mathrm{JD}$$

dargestellt wird. Hierin ist

$$\mathrm{J} = \overset{\cos}{..}\psi + \overset{\sin}{..}\psi . \sqrt{\div 1}$$

und

$$\mathrm{D} = \cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1}.$$

Das Produkt der beiden Koeffizienten J und D, also

$$\mathrm{JD} = (\overset{\cos}{..}\psi + \overset{\sin}{..}\psi . \sqrt{\div 1})\,(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1}), \quad \ldots . (8)$$

wodurch die Richtung der Linie (a) im Raume vollständig dargestellt ist, kann man füglich den vollständigen oder schlechthin den Richtungskoeffizienten jener Linie nennen.

Für jene Linie selbst hat man den Ausdruck

$$(a) = a(\overset{\cos}{..}\psi + \overset{\sin}{..}\psi . \sqrt{\div 1})\,(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1}), \quad \ldots . (9)$$

oder wenn man die Multiplikationen mit den Theilen des Inklinations- und des Deklinationskoeffizienten so weit ausführt, als es nach §. 105 gestattet ist, indem der primäre Theil des letzteren nur mit dem ganzen ersteren und der sekundäre Theil des letzteren mit einem jeden Theile des ersteren multiplizirt wird,

$$\begin{aligned}(a) = a\cos\alpha\,(\overset{\cos}{..}\psi + \overset{\sin}{..}\psi . \sqrt{\div 1}) + a\sin\alpha\overset{\cos}{..}\psi . \sqrt{-1} \\ + a\cos\alpha\overset{\sin}{..}\psi . \sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots . (10)\end{aligned}$$

Hierdurch wird die Linie (a) als aus drei Theilen bestehend dargestellt, von denen der erste in der Richtung der primären Axe liegt und die absolute Länge $a\cos\alpha$ besitzt, der zweite in der Richtung der sekundären Axe liegt und die absolute Länge $a\sin\alpha\cos\psi$ besitzt, und der dritte in der Richtung der tertiären Axe liegt und die absolute Länge $a\cos\alpha\sin\psi$ besitzt. Diese drei Theile sind offenbar die arithmetischen Ausdrücke für die drei rechtwinkligen resp. in den Richtungen der Axe OX, OY, OZ liegenden Koordinaten des Endpunktes der fraglichen Linie, deren Anfangspunkt immer im Nullpunkte O liegend gedacht wird, oder für die drei Projektionen jener Linie auf die drei erwähnten Axen.

Da der Inklinationskoeffizient $\cos\psi + \sin\psi . \sqrt{\div 1}$, sobald er eine primäre Linie behaftet, wie Dies im ersten jener drei Theile geschieht, nur eine Umdrehung derselben um ihre Längenaxe bezeichnet; so kann derselbe offenbar ganz unterdrückt werden, wenn es nur darauf ankommt, die Länge und Richtung jener Linie anzuschauen und dieselbe als additive oder subtraktive Größe in Rechnung zu bringen.

Da außerdem das Zeichen $\div$, wo es entweder allein oder in Verbindung mit dem Faktor $\sqrt{\div 1}$, die Größe $\sqrt{-1}$ behaftet, also entweder eine sekundäre oder tertiäre Linie bezeichnet, ganz und gar die Bedeutung des Zeichens — annimmt, sobald man ebenfalls nur beabsichtigt, diese Linien hinsichtlich ihrer Länge und Richtung zu betrachten und dieselben nur als additive oder subtraktive Theile den arithmetischen Operationen zu unterwerfen; so leuchtet ein, daß man unter diesen Umständen in den letzten beiden Gliedern des obigen Ausdruckes $a\sin\alpha\cos\psi\sqrt{-1}$ für $a\sin\alpha\cos\psi\sqrt{-1}$ und $a\sin\alpha\sin\psi\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$ für $a\sin\alpha\sin\psi\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$ substituiren kann.

Bei den zuletzt gemachten Voraussetzungen kann man also irgend eine Linie (a) einfach

$$(a) = a\cos\alpha + a\sin\alpha\cos\psi.\sqrt{-1} + a\sin\alpha\sin\psi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \ldots . (11)$$

oder

$$(a) = a(\cos\alpha + \sin\alpha\cos\psi.\sqrt{-1} + \sin\alpha\sin\psi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}) \ldots . (12)$$

setzen, worin a immer die absolute Länge der Linie, α ihre Deklination und ψ ihre Inklination bezeichnet. Den Faktor $\cos\alpha + \sin\alpha\cos\psi.\sqrt{-1} + \sin\alpha\sin\psi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$ wollen wir den abgekürzten Richtungskoeffizienten nennen.

Man bemerkt, daß auch hier die Summe der Quadrate der absoluten Werthe der drei Theile des abgekürzten oder des vollständigen Richtungskoeffizienten gleich der Einheit ist, wie sie es auch bei den zwei Theilen des im zweiten Abschnitte betrachteten einfachen Deklinationskoeffizienten war. Es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\psi + \sin^2\alpha\sin^2\psi = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos^2\psi + \sin^2\psi) \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \end{aligned}\right\} \ldots (13)$$

und hieraus folgt, daß die Summe der Quadrate der absoluten Werthe der drei Theile aus Gleichung (11), d. i. die Summe

der Quadrate der drei rechtwinkligen Projektionen der Linie (a), gleich dem Quadrate der absoluten Länge dieser Linie selbst ist.

Wenn der Ausdruck (11) in der Form

$$(a) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(14)$$

gegeben wäre, und man wollte denselben in die Form der Gleichung (11) bringen; so hätte man zu setzen,

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\alpha \\ y &= a\sin\alpha\cos\psi, \\ z &= a\sin\alpha\sin\psi. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(15)$$

Hieraus ergibt sich zur Bestimmung der absoluten Länge a, des Deklinationswinkels α und des Inklinationswinkels ψ der Linie (a)

$$a = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \ldots\ldots(16)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{a},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{a},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x}, \qquad \ldots\ldots(17)$$

$$\cos\psi = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\quad \sin\psi = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}},\quad \operatorname{tang}\psi = \frac{z}{y} \qquad \ldots\ldots(18)$$

Über die vorstehenden Gleichungen ist noch zu bemerken, daß weil a stets eine **absolute** Größe bezeichnen soll, die Wurzelgröße $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ überall **positiv** zu nehmen ist. Die zweite Wurzelgröße $\sqrt{y^2+z^2}$ bleibt jedoch vollkommen zweideutig, und ist es erlaubt, dieselbe entweder positiv oder negativ zu nehmen, nur muß sie in allen Gleichungen (17) und (18) gleichzeitig Ein und dasselbe Zeichen erhalten. Man erkennt die Richtigkeit dieses Satzes auch in geometrischer Bedeutung leicht an. Nimmt man z. B. an, x, y und z seien sämmtlich positiv, und setzt der Kürze wegen $a = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$; so wird unzweifelhaft $\cos\alpha = x$ nur positiv sein können. Durch diese Gleichung ist jedoch die Größe des Winkels α noch nicht genügend bestimmt; bezeichnet man den spitzen Winkel, dessen Kosinus $= x$ ist, mit α_1;

so kann $\alpha = \alpha_1$, und auch $= 2\pi - \alpha_1$ sein. Soll $\alpha = \alpha_1$ sein; so muß $\sin\alpha = \sqrt{y^2+z^2}$ ebenfalls positiv sein, und daher die Wurzelgröße $\sqrt{y^2+z^2}$ überall positiv genommen werden. Alsdann wird aber auch $\cos\psi = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$ und $\sin\psi = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$ positiv und $\psi = \psi_1$ ein spitzer Winkel sein. Wenn dagegen $\alpha = 2\pi - \alpha_1$ gesetzt wird; so muß $\sin\alpha = -\sqrt{y^2+z^2}$ gesetzt und die vorstehende Wurzelgröße auch in den Werthen für $\cos\psi$ und $\sin\psi$ negativ genommen werden. Für diesen Fall wird man $\psi = \pi + \psi_1$ erhalten. Es entsprechen sich also für den Fall, daß x, y, z sämmtlich positiv sind, die beiden Werthe $\alpha = \alpha_1$ und $\psi = \psi_1$ oder $\alpha = 2\pi - \alpha_1$ und $\psi = \pi + \psi_1$. Hierdurch wird aber auch in der That nur Ein und dieselbe Richtung im Raume dargestellt, welche vom Nullpunkte O aus nur nach Einer Seite verlängert ist.

In alle den Fällen, wo es nicht genügt, die Linie (a) mit Hülfe des abgekürzten Richtungskoeffizienten (Gleichung 12) darzustellen, und wo es erforderlich ist, den Ausdruck derselben in der vollständigen Form (9) oder (10) darzustellen, wird man auch den einfachen Ausdruck (14) nicht beibehalten können und genöthigt sein, vermittelst der für a, α und ψ aus den Gleichungen (16), (17) und (18) gefundenen Werthe die Form (9) oder (10) herzustellen. Nun bemerkt man, daß in den Gleichungen (18) für $\cos\psi$ und $\sin\psi$ das Zeichen $\div$ nicht erscheint, und daß dieselben daher die Werthe für $\overset{\cos}{\cdot\cdot}\psi$ und $\overset{\sin}{\cdot\cdot}\psi$, wie sie behuf Substitution in die Gleichung (9) oder (10) erforderlich sind, unmittelbar nicht ergeben. Es leuchtet jedoch nach §. 104 ein, daß man die zuletzt erwähnten Werthe für $\overset{\cos}{\cdot\cdot}\psi$ und $\overset{\sin}{\cdot\cdot}\psi$ aus den obigen für $\cos\psi$ und $\sin\psi$ erhält, indem man dieselben ohne Weiteres beibehält, falls sie positiv ausfallen, und indem man das Vorziehen — in $\div$ verwandelt, falls sie negativ ausfallen sollten.

Wäre z. B. der Ausdruck

$$(a) = x - y\sqrt{-1} + z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

gegeben; so würde man

$$\cos\psi = -\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \text{ und } \sin\psi = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

mithin

$$\overset{\cos}{\cdot\cdot}\psi = \div\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \text{ und } \overset{\sin}{\cdot\cdot}\psi = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

haben.

Endlich muß noch bemerkt werden, daß zwei Linien von der Form

$$(a) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

und

$$(a_1) = x_1 + y_1\sqrt{-1} + z_1\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

nur dann einander gleich sein können, wenn die primären, sekundären und tertiären Theile für sich einander gleich sind, wenn man also

$$x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$$

hat. Dies geht unmittelbar daraus hervor, daß beide Linien gleiche absolute Längen $a = a_1$, ferner gleiche Deklinationen $\alpha = \alpha_1$ und endlich auch gleiche Inklinationen $\psi = \psi_1$ haben müssen, wenn sie sowol der Länge, wie der Richtung nach identisch sein sollen. —

Gehen wir jetzt zu den arithmetischen Grundoperationen an Größen von der obigen allgemeinen Art über.

§. 107. Addition und Subtraktion.

Die Addition schießt immer die Forderung ein, daß man eine gegebene Größe in derjenigen Richtung, in welcher die Quantität einer zweiten durch das einfache Gesetz der Vermehrung entstanden ist, um die Quantität dieser zweiten Größe weiterbilde. In geometrischer Bedeutung verlangt diese Operation, daß man von dem Endpunkte einer ersten geraden Linie (a) in der Richtung und um die Länge einer zweiten geraden Linie (b) vorwärts schreite. Ein von dem Anfangspunkte der ersten Linie (a), d. i. von dem Nullpunkte des ganzen Systemes nach dem Endpunkte der so an (a) getragenen Linie (b) gezogener Vektor (c) stellt alsdann die arithmetische Summe $(a)+(b)$ dar.

Die Subtraktion setzt voraus, daß die Summe (c) und Ein Summand (a) gegeben sei, und verlangt den zweiten Summand (b) herzustellen. Aus dem Begriffe der Addition folgt

alsdann, daß man die Differenz (*b*) zwischen (*c*) und (*a*) findet, wenn man vom Endpunkte des Minuend (*c*) in einer der Richtung des Subtrahend (*a*) direkt entgegengesetzten Richtung um die absolute Länge des Letzteren fortschreitet.

Unter dem Gesichtspunkte der Addition und Subtraktion sind also alle Linien der primären Axe identisch, welche dieselbe Länge besitzen, gleichviel, mit welchem Inklinationskoeffizienten dieselben behaftet sein mögen. Will man also die Operationen der Addition und Subtraktion an den Theilen zweier gegebener Linien wirklich zur Ausführung bringen; so ist es erforderlich, daß dieselben mit Hülfe des abgekürzten Richtungskoeffizienten (Gleichung 12) oder auch in der Form der Gleichung (14) dargestellt seien. Sind nun zwei Linien (*a*) und (a_1) in dieser Form gegeben, hat man also

$$(a) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \text{ und}$$

$$(a_1) = x_1 + y_1\sqrt{-1} + z_1\sqrt{\div 1}\sqrt{-1};$$

so ergibt sich durch eine Ausführung der Addition oder Subtraktion dieser beiden Ausdrücke nach den Regeln der Arithmetik

$$(a) \pm (a_1) = x \pm x_1 + (y \pm y_1)\sqrt{-1} + (z \pm z_1)\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots . (19)$$

Es ist leicht zu zeigen, daß dieses Resultat auch in geometrischer Beziehung vollkommene Gültigkeit hat, und man sieht, daß die Summe oder Differenz zweier, ihrer Länge und Richtung nach betrachteter Linien erhalten wird, wenn man die Projektionen derselben resp. auf eine jede der drei rechtwinkligen Axen addirt oder subtrahirt.

Auch erkennt man ohne Schwierigkeit die Richtigkeit des in §. 49 für eine ebene Figur bereits nachgewiesenen Satzes, daß die arithmetische Summe aller Seiten irgend einer geschlossenen Figur im Raume gleich null ist, wenn man dieselben in denjenigen Richtungen nimmt, in welchen dieselben von einem Punkte durchlaufen werden würden, der sich, von einer Ecke dieser Figur ausgehend, um den ganzen Umfang derselben bewegte, oder daß die letzte Seite dieser Figur, wenn man dieselbe in entgegengesetzter Richtung nimmt, gleich der Summe aller übrigen ist. Die Gleichheit zwischen dieser letzten Seite in der gedachten Richtung

und der Summe der übrigen fordert alsdann auch, daß die Projektionen jener Seite auf drei rechtwinklige Axen den respektiven Summen der Projektionen der übrigen Seiten der Figur auf dieselben Axen gleich seien.

§. 108. Multiplikation und Division.

Die Multiplikation verlangt, daß das Produkt ebenso aus dem Multiplikand entstehe, wie der Multiplikator durch die Gesetze der Längenbildung in gerader Linie, der Drehung um den Nullpunkt im Kreise und der Drehung um die primäre Axe aus der positiven Längeneinheit hervorgegangen ist. Die Division gibt das Produkt und einen Faktor und sucht den anderen Faktor.

Aus dieser Erklärung des Begriffes der Multiplikation und Division geht hervor, daß es behuf Ausführung dieser Operationen im Allgemeinen erforderlich sein wird, die miteinander zu multiplizirenden oder durcheinander zu dividirenden Größen mit Hülfe des vollständigen Richtungskoeffizienten, also in der Form (9) oder (10) zu geben, weil sich nur unter dieser Form der Akt der Entstehung jener Linien aus der Einheit nach dem Typus der erwähnten Gesetze der Drehung und Längenbildung genügend ausspricht.

Sind nun zwei Linien (a) und (a_1) unter jener Form gegeben, hat man also

$$(a)=a(\cos\psi+\sin\psi\,.\,\sqrt{\div 1})(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})=ae^{\psi\sqrt{\div 1}}e^{\alpha\sqrt{-1}},$$

$$(a_1)=a_1(\cos\psi_1+\sin\psi_1.\sqrt{\div 1})(\cos\alpha_1+\sin\alpha_1.\sqrt{-1})=a_1e^{\psi_1\sqrt{\div 1}}e^{\alpha_1\sqrt{-1}};$$

so ergibt eine arithmetische Ausführung der Multiplikation und Division dieser beiden Größen

$$(a)(a_1)=aa_1e^{(\psi+\psi_1)\sqrt{\div 1}}e^{(\alpha+\alpha_1)\sqrt{-1}}=aa_1[\cos(\psi+\psi_1)+\sin(\psi+\psi_1).\sqrt{\div 1}]$$
$$\times[\cos(\alpha+\alpha_1)+\sin(\alpha+\alpha_1).\sqrt{-1}) \qquad \ldots.(20)$$

und

$$\frac{(a)}{(a_1)}=\frac{a}{a_1}e^{(\psi-\psi_1)\sqrt{\div 1}}e^{(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}}=\frac{a}{a_1}[\cos(\psi-\psi_1)+\sin(\psi-\psi_1).\sqrt{\div 1}]$$
$$\times[\cos(\alpha-\alpha_1)+\sin(\alpha-\alpha_1).\sqrt{-1}] \qquad \ldots.(21)$$

Aus diesen Formeln geht hervor, daß bei der Multiplikation der beiden Linien (a) und (a_1) ihre absoluten Quantitäten nach den Regeln der Multiplikation absoluter Zahlen miteinander multiplizirt werden. Um die Richtung des Produktes $(a)(a_1)$ zu erhalten, hat man sowol die Deklinationswinkel der beiden Faktoren oder die Abweichungen derselben von der Richtung der primären Axe, wie auch die Inklinationswinkel derselben oder die Neigungen ihrer Ebenen gegen die Grundebene zu addiren. Bei der Division findet eine wirkliche Division der Quantitäten a und a_1 nach den für absolute Zahlen geltenden Regeln und eine Subtraktion der Deklinations- und Inklinationswinkel statt. Man erkennt, daß auch dieses Prinzip der Multiplikation und Division nur ein verallgemeinerter Fall des im zweiten Abschnitte für die Linien in Einer Ebene gegebenen Gesetzes ist.

Wenn man in den vorstehenden Gleichungen die Multiplikationen zwischen den Deklinations- und Inklinationskoeffizienten, soweit es nach §. 105 gestattet ist, wirklich ausführt; so erhält man

$$(a) = a\cos\alpha\,(\overset{\cos}{\cdot\cdot}\psi + \overset{\sin}{\cdot\cdot}\psi\,.\,\sqrt{\div 1}) + a\sin\alpha\overset{\cos}{\cdot\cdot}\psi\sqrt{-1} + a\sin\alpha\overset{\sin}{\cdot\cdot}\psi\,.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},$$

$$(a_1) = a_1\cos\alpha_1(\overset{\cos}{\cdot\cdot}\psi_1 + \overset{\sin}{\cdot\cdot}\psi_1\,.\sqrt{\div 1}) + a_1\sin a_1\overset{\cos}{\cdot\cdot}\psi_1\,.\sqrt{-1} + a_1\sin\alpha_1\overset{\sin}{\cdot\cdot}\psi_1\,.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},$$

$$(a)(a_1) = aa_1\cos(\alpha+\alpha_1)\,[\overset{\cos}{\cdot\cdot}(\psi+\psi_1) + \overset{\sin}{\cdot\cdot}(\psi+\psi_1)\,.\,\sqrt{\div 1}] + aa_1\sin(\alpha+\alpha_1)\overset{\cos}{\cdot\cdot}(\psi+\psi_1)\,.\sqrt{-1} + aa_1\sin(\alpha+\alpha_1)\overset{\sin}{\cdot\cdot}(\psi+\psi_1)\,.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},$$

$$\frac{(a)}{(a_1)} = \frac{a}{a}\cos(\alpha-\alpha_1)\,[\overset{\cos}{\cdot\cdot}(\psi-\psi_1) + \overset{\sin}{\cdot\cdot}(\psi-\psi_1)\,.\sqrt{\div 1}] + \frac{a}{a_1}\sin(\alpha-\alpha_1)\overset{\cos}{\cdot\cdot}(\psi-\psi_1\,.\sqrt{-1} + \frac{a}{a_1}\sin(\alpha-\alpha_1)\overset{\sin}{\cdot\cdot}(\psi-\psi_1)\,.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}.$$

Wenn man sich der abgekurzten Richtungskoeffizienten (Gleichung 11) bedienen wollte, um nur die absoluten Werthe der drei nach den rechtwinkligen Axen gemessenen Theile dieser Linien anzuschauen; so würden sich diese Ausdrücke auf

$$\left.\begin{aligned}(a)&=a\cos\alpha+a\sin\alpha\cos\psi\,.\sqrt{-1}+a\sin\alpha\sin\psi\,.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},\\(a_1)&=a_1\cos\alpha_1+a_1\sin\alpha_1\cos\psi_1.\sqrt{-1}+a_1\sin\alpha_1\sin\psi_1\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\end{aligned}\right\}\ldots.(22)$$

$$\left.\begin{aligned}(a)(a_1)&=aa_1\cos(\alpha+\alpha_1)+aa_1\sin(\alpha+\alpha_1)\cos(\psi+\psi_1).\sqrt{-1}\\&\quad+aa_1\sin(\alpha+\alpha_1)\sin(\psi+\psi_1).\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\\\frac{(a)}{(a_1)}&=\frac{a}{a_1}\cos(\alpha-\alpha_1)+\frac{a}{a_1}\sin(\alpha-\alpha_1)\cos(\psi-\psi_1).\sqrt{-1}\\&\quad+\frac{a}{a_1}\sin(\alpha-\alpha_1)\sin(\psi-\psi_1).\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\end{aligned}\right\}\ldots.(23)$$

reduziren.

Wenn $a_1=0$, also

$$(a_1)=a_1(\overset{\cos}{\cdot\cdot}\psi_1+\overset{\sin}{\cdot\cdot}\psi_1\,.\sqrt{-1})$$

wäre, d. h. wenn neben einer wirklichen Vervielfältigung oder Theilung der Quantität a der ersten Linie durch die Quantität a_1 der zweiten Linie nur eine fernere Drehung der ersten Linie (a) um den Winkel $\mp\psi_1$ um die primäre Axe beabsichtigt würde; so würden sich die beiden letzteren Gleichungen (23) auf

$$\left.\begin{aligned}(a)(a_1)&=aa_1\cos\alpha+aa_1\sin\alpha\cos(\psi+\psi_1).\sqrt{-1}\\&\quad+aa_1\sin\alpha\sin(\psi+\psi_1).\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\\\frac{(a)}{(a_1)}&=\frac{a}{a_1}\cos\alpha+\frac{a}{a_1}\sin\alpha\cos(\psi-\psi_1).\sqrt{-1}\\&\quad+\frac{a}{a_1}\sin\alpha\sin(\psi-\psi_1).\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\end{aligned}\right\}\quad\ldots.(24)$$

vereinfachen. Hieraus erkennt man, daß unter der gemachten Voraussetzung die Resultate (24) als Produkte oder Quotienten aus der Linie

$$(a)=a\cos\alpha+a\sin\alpha\cos\psi.\sqrt{-1}+a\sin\alpha\sin\psi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

und einer anderen Linie von der Quantität a_1 und dem Inklinationskoeffizienten $\overset{\cos}{\cdot\cdot}\psi_1+\overset{\sin}{\cdot\cdot}\psi_1.\sqrt{\div 1}$ erhalten werden, wenn man neben der Multiplikation oder Division durch die Quantität a_1 das primäre Glied $a\cos\alpha$ ungeändert läßt, die Summe des sekundären und tertiären Gliedes $a\sin\alpha\cos\psi.\sqrt{-1}+a\sin\alpha\sin\psi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}=a\sin\alpha(\cos\psi+\sin\psi.\sqrt{\div 1})\sqrt{-1}$

aber mit dem Faktor $\cos\psi_1 \pm \sin\psi_1 \sqrt{\div 1}$ multiplizirt, wobei $\sqrt{\div 1}\sqrt{\div 1} = \div 1 = -1$ zu setzen ist, da diese Größe in den Faktor $\sqrt{-1}$ multiplizirt ist (s. §. 104 und 105). Wenn man gleichzeitig $a_1 = 1$ setzt; so bleibt die Quantität des Produktes oder Quotienten (24) gleich der der Linie (a), und eine Multiplikation des sekundären und tertiären Gliedes in dem Ausdrucke von (a) mit dem Inklinationskoeffizienten $\cos\psi_1 \pm \sin\psi_1 \sqrt{\div 1}$ entspricht einer einfachen Drehung dieser Linie um die primäre Axe und zwar um den Winkel $\pm\psi_1$.

§. 109. Potenziirung und Wurzelausziehung.

Wenn man den Ausdruck für die Linie (a), nämlich

$$(a) = a e^{\psi\sqrt{\div 1}} e^{\alpha\sqrt{-1}} = a(\underset{\cdot\cdot}{\cos}\psi + \underset{\cdot\cdot}{\sin}\psi . \sqrt{\div 1})(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1})$$

auf die $n$te Potenz erhebt, worin n jede beliebige Zahl bedeutet; so erhält man

$$\begin{aligned}(a)^n &= a^n e^{n\psi\sqrt{\div 1}} e^{n\alpha\sqrt{-1}} = a^n (\underset{\cdot\cdot}{\cos} n\psi + \underset{\cdot\cdot}{\sin} n\psi . \sqrt{\div 1}) \\ &\qquad (\cos n\alpha + \sin n\alpha . \sqrt{-1}) \qquad \ldots . (25) \\ &= a^n \cos n\alpha (\underset{\cdot\cdot}{\cos} n\psi + \underset{\cdot\cdot}{\sin} n\psi . \sqrt{\div 1}) + a^n \sin n\alpha \underset{\cdot\cdot}{\cos} n\psi . \sqrt{-1} \\ &\quad + a^n \sin n\alpha \underset{\cdot\cdot}{\sin} n\psi . \sqrt{\div 1}\sqrt{-1},\end{aligned}$$

oder abgekürzt

$$(a)^n = a^n \cos n\alpha + a^n \sin n\alpha \cos n\psi . \sqrt{-1} + a^n \sin n\alpha \sin n\psi . \sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \ldots (26)$$

Aus der Formel (25) erkennt man, daß die absolute Quantität der Potenz $(a)^n$ immer gleich der $n$ten Potenz der Quantität a ist, und daß sowol der Deklinations- wie der Inklinationswinkel der Potenz resp. gleich dem $n$fachen des Deklinations- und des Inklinationswinkels der Größe (a) ist.

Ist nun n positiv; so liegen die letztgedachten Winkel der Potenz mit denen der Größe (a) in derselben Richtung, resp. um den Nullpunkt und um die primäre Axe herum: ist dagegen n negativ; so liegen dieselben nach entgegengesetzten Richtungen von denen, in welchen die Drehung der Größe (a) resp. um den Nullpunkt und um die primäre Axe vorgenommen gedacht wird.

Wenn n eine ganze Zahl ist; so wird die Potenz $(a)^n$ immer nur einen einzigen Werth haben; denn wenn man auch für

die Deklination α und für die Inklination ψ der Linie (a) nach und nach einen jeden der in der Form $\alpha+2i\pi$ und $\psi+2i\pi$, worin i jede ganze Zahl bedeutet, enthaltenen Werthe substituirt, was offenbar erlaubt ist, da man sich diese Winkel nicht bloß durch eine Drehung um die Größen α und ψ, sondern auch durch eine fernere beliebig vielmal wiederholte ganze Umdrehung resp. um den Nullpunkt und um die primäre Axe erzeugt denken kann; so wird doch immer

$$\cos n(\alpha+2i\pi)+\sin n(\alpha+2i\pi).\sqrt{-1}=\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1}$$

und

$$\overset{\cos}{\cdot\cdot}n(\psi+2i\pi)+\overset{\sin}{\cdot\cdot}n(\psi+2i\pi).\sqrt{\div 1}=\overset{\cos}{\cdot\cdot}n\psi+\overset{\sin}{\cdot\cdot}\psi.\sqrt{\div 1}$$

sein.

Wenn aber n ein Bruch vom Nenner q, z. B. $=\frac{p}{q}$ ist; so wird sowol der Ausdruck

$$\cos\frac{p}{q}(\alpha+2i\pi)+\sin\frac{p}{q}(\alpha+2i\pi).\sqrt{-1},$$

wie auch den Ausdruck

$$\overset{\cos}{\cdot\cdot}\frac{p}{q}(\psi+2i\pi)+\overset{\sin}{\cdot\cdot}\frac{p}{q}(\psi+2i\pi).\sqrt{\div 1},$$

q verschiedene Werthe annehmen können, welche man erhält, wenn man für i sukzessive die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots .(q-1)$ substituirt (s. §. 51). Da sich nun ein jeder dieser q Werthe des Deklinationskoeffizienten mit einem jeden der q Werthe des Inklinationskoeffizienten in der Gleichung (25) kombiniren läßt; so folgt, daß in dem vorliegende Falle die Potenz $(a)^{\frac{p}{q}}$ q^2 verschiedene Werthe annehmen kann. Von diesen q^2 Werthen liegen immer je q in gleichen Winkelabständen von $\frac{\alpha}{q}$ in Ein und derselben durch die primäre Axe gehenden Ebene, und die letzteren Ebenen, deren Anzahl wiederum $=q$ ist, neigen sich sämmtlich unter dem Winkel $\frac{\psi}{q}$ sukzessive gegeneinander.

Der letztere Fall der Erhebung einer Größe (a) zu einer Potenz mit gebrochenem Exponenten begreift zugleich den Fall der Wurzelausziehung mit in sich, da allgemein

$$\sqrt[n]{(a)} = (a)^{\frac{1}{n}}$$

ist.

Verschiedene Anwendungen der vorstehenden Prinzipien auf die Geometrie der drei Dimensionen.

§. 110. Vertauschung der Bedeutung der drei rechtwinkligen Axen OX, OY, OZ miteinander und daraus fließende Beziehungen zwischen den Neigungen einer gegebenen Geraden gegen diese Axen und gegen die drei Koordinatenebenen.

Wenn a die absolute Länge, α die Deklination, φ die Inklination der Linie

$$(a) = a(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{\div 1})(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1}) \quad \ldots . (27)$$

oder mit Anwendung des abgekürzten Richtungskoeffizienten (§. 106) der Linie

$$(a) = a\cos\alpha + a\sin\alpha\cos\varphi . \sqrt{-1} + a\sin\alpha\sin\varphi . \sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots . (28)$$

bezeichnet, und man setzt die Projektionen der Linie (a) auf die primäre, sekundäre und tertiäre Axe OX, OY, OZ resp. $= x, y, z$ (§. 106); so hat man

$$(a) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots . (29)$$

und hierin ist

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\alpha, \\ y &= a\sin\alpha\cos\varphi, \\ z &= a\sin\alpha\sin\varphi; \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (30)$$

ferner zur Bestimmung der Größen a, α, φ als Funktionen von x, y, z

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \ldots . (31)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots . (32)$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{z}{y} \quad \ldots . (33)$$

Hierbei hat man auch die Werthe für $\sin\alpha$ und für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus den Gleichungen (17) und (18), sowie das hierüber in §. 106 Gesagte zu berücksichtigen, um über die Werthe der Winkel α und φ gar keinen Zweifel übrig zu lassen.

Vertauscht man jetzt die Bedeutung der Axen OX, OY, OZ dergestalt, daß OY die primäre, OZ die sekundäre und OX die tertiäre Axe wird, indem man unter dieser Voraussetzung die Deklination der Linie (a), d. i. die Neigung derselben gegen die Axe $OY=\beta$ und die Inklination derselben, d. i. die Neigung der durch OY und die Linie (a) gehenden Ebene gegen die Ebene YZ (wobei die positive Axendrehung von Z nach X gerechnet ist) $=\psi$ setzt; so hat man

$$(a)=a\cos\beta+a\sin\beta\cos\psi.\sqrt{-1}+a\sin\beta\sin\psi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(34)$$

und auch

$$(a)=y+z\sqrt{-1}+x\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(35)$$

Hieraus folgt, wie vorhin, zur Bestimmung der Werthe der Winkel β und ψ

$$\cos\beta=\frac{y}{a}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \ldots.(36)$$

und

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{x}{z} \quad \ldots.(37)$$

Nimmt man endlich OZ zur primären, OX zur sekundären und OY zur tertiären Axe an, indem man unter dieser Voraussetzung die Deklination der Linie (a), d. i. die Neigung derselben gegen die Axe $OZ=\gamma$ und die Inklination derselben, d. i. die Neigung einer durch OZ und die Linie (a) gehenden Ebene gegen die Ebene ZX (wobei die positive Axendrehung von X nach Y gerechnet ist) $=\chi$ setzt; so ergibt sich

$$(a)=a\cos\gamma+a\sin\gamma\cos\chi.\sqrt{-1}+a\sin\gamma\sin\chi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(38)$$

und auch

$$(a)=z+x\sqrt{-1}+y\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(39)$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet sich, wie oben, zur Bestimmung der Werthe der Winkel γ und χ

$$\cos\gamma = \frac{z}{a} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \ldots.(40)$$

und

$$\operatorname{tang}\chi = \frac{y}{x} \qquad \ldots.(41)$$

Wegen der Gleichungen (32), (36) und (40) hat man

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad \ldots.(42)$$

d. h. die Summe der Quadrate der Kosinus der Neigungswinkel irgend einer Linie (a) gegen drei rechtwinklige Axen OX, OY, OZ ist stets $= 1$.

Aus den Gleichungen (33), (37) und (41) folgt

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang}\chi = 1 \qquad \ldots.(43)$$

Hierin bezeichnet φ den Neigungswinkel einer durch (a) und OX gehenden Ebene gegen die Ebene XY, ψ den Neigungswinkel einer durch (a) und OY gehenden Ebene gegen die Ebene YZ und χ den Neigungswinkel einer durch (a) und OZ gehenden Ebene gegen die Ebene ZX.

Wenn man die Neigungswinkel der Linie (a) gegen die Ebenen XY, ZX, YZ resp. mit λ, μ, ν bezeichnet; so erkennt man leicht, daß wenn man sich die durch die Linie (a) und die Axe OZ gelegte Ebene bis zur Durchschnittslinie mit der Ebene XY erweitert denkt, daß $\lambda = \frac{\pi}{2} - \gamma$, also

$$\sin\lambda = \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \ldots.(44)$$

ist, und daß außerdem χ (Gleichung 41) den Winkel darstellt, welchen die ebenerwähnte Durchschnittslinie in der Ebene XY mit der Axe OX einschließt.

Ebenso ist $\mu = \frac{\pi}{2} - \beta$, also

$$\sin\mu = \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \ldots.(45)$$

und wenn man sich die durch die Linie (a) und die Axe OY ge-

legte Ebene bis zur Durchschnittslinie mit der Ebene ZX erweitert denkt; so findet man, daß ψ (Gleichung 37) den Neigungswinkel dieser Durchschnittslinie mit der Axe OZ darstellt.

Endlich ist $\nu = \frac{\pi}{2} - \alpha$, also

$$\sin\nu = \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \ldots.(46)$$

und es zeigt sich, wenn man sich die durch die Linie (a) und die Axe OX gelegte Ebene bis zur Durchschnittslinie mit der Ebene YZ erweitert denkt, daß durch φ (Gleichung 33) der Neigungswinkel dieser Durchschnittslinie gegen die Axe OY dargestellt wird.

Wenn man in den Gleichungen (36) bis (41) für x, y und z ihre Werthe aus den Gleichungen (30) oder aus der Formel (28) substituirt; so findet man auch für die Werthe der Größen β, γ, ψ, χ als Funktionen von α und φ

$$\cos\beta = \sin\alpha\cos\varphi, \qquad \ldots.(47)$$

$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\varphi, \qquad \ldots.(48)$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha\sin\varphi}, \qquad \ldots.(49)$$

$$\operatorname{tang}\chi = \operatorname{tang}\alpha\cos\varphi, \qquad \ldots.(50)$$

durch welche Beziehungen man denn auch die beiden Gleichungen (42) und (43) bestätigt findet.

§. 111. Bestimmung des Neigungswinkels zweier gegebenen Geraden gegeneinander.

Wenn irgend zwei durch den Nullpunkt gehende Linien von der Länge a_1 und a_2 resp. durch

$$\left.\begin{aligned}(a_1) &= x_1 + y_1\sqrt{-1} + z_1\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \text{ und}\\ (a_2) &= x_2 + y_2\sqrt{-1} + z_2\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\end{aligned}\right\} \qquad \ldots.(51)$$

dargestellt werden, und man denkt sich ihre Endpunkte durch eine

gerade Linie miteinander verbunden, welche die Länge a habe und durch

$$(a) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{+1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (52)$$

dargestellt werde, indem man sich dieselbe gleichfalls an den Nullpunkt getragen denkt; so wird die letzte Seite (a_1) der durch (a_2), (a) und (a_1) gebildeten geschlossenen Figur nach §. 107 gleich der arithmetischen Summe $(a_2)+(a)$ der übrigen sein, wenn man sich die letzteren in denjenigen Richtungen genommen denkt, in welchen Ein vom Nullpunkte ausgehender Punkt erst die (a_2) und dann die (a) durchlaufen würde, während (a_1) in der Richtung vom Nullpunkte gegen ihren zweiten Endpunkt genommen wird. Man hat also

$$(a_1) = (a_2) + (a) \text{ oder}$$
$$(a) = (a_1) - (a_2),$$

d. i. wegen der obigen Werthe für (a_1) und (a_2) und nach §. 107

$$(a) = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)\sqrt{-1} + (z_1 - z_2)\sqrt{+1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (53)$$

Dieser Ausdruck für (a) muß mit dem obigen (52) identisch sein, sodaß man

$$x = x_1 - x_2,\ y = y_1 - y_2,\ z = z_1 - z_2 \quad \ldots\ldots (54)$$

hat.

Nach einer bekannten Formel (31) ist nun ferner

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2),$$

d. i. wegen der Gleichungen (51)

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2).$$

In dem durch die drei Linien (a_1), (a) und (a_2) gebildeten Dreiecke ist nun aber auch, wenn man den von den beiden Seiten (a_1) und (a_2) eingeschlossenen Winkel $= \omega$ setzt (§. 70),

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos\omega,$$

und man hat daher, wenn man die beiden vorstehenden Werthe

für a^2 einander gleich und darauf $a_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ und $a_2 = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$ setzt, nach gehöriger Reduktion

$$\cos\omega = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \quad \ldots\ldots(55)$$

oder wenn man die Neigungswinkel der Linie (a_1) gegen die drei Axen OX, OY, OZ resp. mit α_1, β_1, γ_1 und die entsprechenden Neigungswinkel der Linie (a_2) mit α_2, β_2, γ_2 bezeichnet, wegen der Gleichungen (32), (36) und (40)

$$\cos\omega = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 \quad \ldots\ldots(56)$$

Durch diese Gleichung ist der Neigungswinkel ω der beiden Linien (a_1) und (a_2) gegeneinander als Funktion der Neigungswinkel dieser Linien gegen die drei rechtwinkligen Axen ausgedrückt.

Wenn die beiden Linien (a_1) und (a_2) rechtwinklig aufeinander stehen; so hat man $\omega = \frac{\pi}{2}$, also $\cos\omega = 0$ und daher

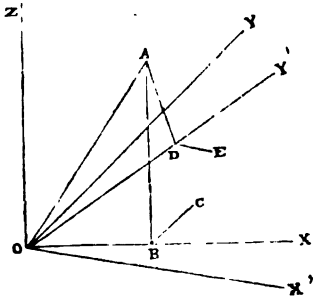
$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0 \quad \ldots\ldots(57)$$

oder auch

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0 \quad \ldots\ldots(58)$$

Das sphärische Dreieck.

§. 112. Irgend eine Linie (OA) von der Länge a, der Inklination $AOX = \alpha$ und der Inklination $ABC = \varphi$ wird dargestellt durch



$$(a)=a(\cos\alpha+\sin\alpha\cos\varphi.\sqrt{-1}+\sin\alpha\sin\varphi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}) \quad \ldots.(59)$$

Nimmt man jetzt OZ zur primären, OX zur ſekundären und OY zur tertiären Axe an; ſo wird der arithmetiſche Ausdruck dieſer Linie

$$(a)=a(\sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha.\sqrt{-1}+\sin\alpha\cos\varphi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}) \quad \ldots.(60)$$

ſein.

Jetzt nehme man an, die Linie (OA) werde in der Richtung XY um die primäre Axe OZ und zwar um den Winkel ϑ gedrehet. Nach §. 108 erhält man den Ausdruck für dieſe Linie in der neuen Lage, wenn man das ſekundäre und tertiäre Glied der vorſtehenden Gleichung mit dem Faktor $\cos\vartheta+\sin\vartheta.\sqrt{\div 1}$ multiplizirt und dabei $\sqrt{\div 1}\sqrt{\div 1}=\div 1=-1$ ſetzt. Dies ergibt

$$(a)=a\,[\sin\alpha\sin\varphi+(\cos\alpha\cos\vartheta-\sin\alpha\cos\varphi\sin\vartheta)\sqrt{-1} \\ +(\cos\alpha\sin\vartheta+\sin\alpha\cos\varphi\cos\vartheta)\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}] \quad \ldots.(61)$$

Man erkennt nun leicht, daß die vorſtehende Formel auch der Ausdruck für die Linie (OA) ſein würde, wenn man dieſelbe in der früheren Lage unverrückt gelaſſen, dagegen die beiden Axen OX und OY in der Richtung YX um die primäre Axe OZ und zwar um denſelben Winkel $YOY'=\vartheta$ gedrehet hätte. Wenn hierdurch die ſekundäre Axe OX in die Lage OX' und die tertiäre Axe OY in die Lage OY' gekommen wäre, und man nähme nun OY' zur primären, OX' zur ſekundären und OZ zur tertiären Axe an; ſo würde die Linie (OA) durch

$$(a)=a[(\cos\alpha\sin\vartheta+\sin\alpha\cos\varphi\cos\vartheta)+(\cos\alpha\cos\vartheta-\sin\alpha\cos\varphi\sin\vartheta)\sqrt{-1} \\ +\sin\alpha\sin\varphi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}] \quad \ldots.(62)$$

dargeſtellt ſein.

Bezeichnet man für dieſe Axen OY', OX', OZ die Deklination der Linie OA, d. i. den Winkel AOY', mit β und die Inklination derſelben, d. i. den Winkel ADE, mit ψ; ſo hat man nach Gleichung (32), wenn man darin für x, y und z ihre Werthe aus der vorſtehenden Gleichung (62) ſubſtituirt,

$$\cos\beta=\cos\alpha\sin\vartheta+\sin\alpha\cos\varphi\cos\vartheta$$

und nach Gleichung (33)

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\cos\alpha\cos\vartheta - \sin\alpha\cos\varphi\sin\vartheta},$$

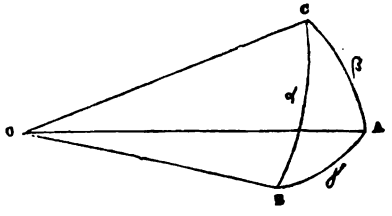
oder wenn man den Winkel $Y'OX = \frac{\pi}{2} - \vartheta = \gamma$, also $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ setzt,

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos\varphi, \qquad \ldots.(63)$$

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma\cos\varphi} \qquad \ldots.(64)$$

§. 113. Allgemeine Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten eines sphärischen Dreiecks.

Wenn ABC irgend ein sphärisches Dreieck ist, und man bezeichnet die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten BC, CA, AB, oder vielmehr (wenn O der Mittelpunkt der zugehö-



rigen Kugel ist) die Winkel BOC, COA, AOB resp. mit α, β, γ und die Winkel an den Ecken A, B, C oder vielmehr die Neigungswinkel der in den Kanten OA, OB, OC zusammentreffenden Ebenen der körperlichen Ecke OABC resp. mit A, B, C; so erkennt man leicht, daß sich aus der obigen Gleichung (63) eine Beziehung zwischen den Größen α, β, γ und B ergibt, wenn man darin B an die Stelle von φ setzt, indem man sich in der Figur des vorhergehenden Paragraphes die Kante OC durch die Linie (OA), die Kante OB durch die Axe OX und die Kante OA durch die Axe OY' vertreten denkt. Hiernach hat man

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos B \qquad \ldots.(65)$$

Ebenſo erhält man aus der Gleichung (64) eine Beziehung zwiſchen den Größen α, γ, A, B, wenn man darin A und B reſp. für ψ und φ ſubſtituirt; dieſe iſt

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin\alpha \sin B}{\cos\alpha \sin\gamma - \sin\alpha \cos\gamma \cos B} \qquad \ldots\ldots (66)$$

Die vorſtehenden beiden Formeln umſchließen die ganze ſphäriſche Trigonometrie, ſoweit dieſelbe darauf hinausgeht, aus je drei der ſechs Elemente α, β, γ, A, B, C eines ſphäriſchen Dreiecks, die übrigen drei zu berechnen.

Für die einzelnen hierbei vorkommenden Fälle erhält man leicht auf folgende Weiſe die gewünſchten Gleichungen.

§. 114. Beziehungen zwiſchen den drei Seiten und Einem Winkel eines ſphäriſchen Dreiecks.

Analogiſch ergeben ſich aus der Gleichung (65) für dieſen Fall die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A, \\ \cos\beta &= \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos B, \\ \cos\gamma &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (67)$$

§. 115. Beziehungen zwiſchen zwei Seiten und zwei Winkeln, von denen der Eine der Letzteren von den gegebenen Seiten eingeſchloſſen wird.

Wenn man die Gleichung (66) mit dem Nenner auf der rechten Seite multiplizirt und darauf durch $\sin\alpha \operatorname{tang} A$ dividirt; ſo ergibt ſich

$$\cot\alpha \sin\gamma = \cot A \sin B + \cos\gamma \cos B.$$

Dieſe Gleichung liefert durch analoge Anwendung auf ähnlich liegende Elemente des ſphäriſchen Dreiecks die folgenden Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
\cot\alpha\sin\beta &= \cot A\sin C + \cos\beta\cos C,\\
\cot\alpha\sin\gamma &= \cot A\sin B + \cos\gamma\cos B;\\
\cot\beta\sin\alpha &= \cot B\sin C + \cos\alpha\cos C,\\
\cot\beta\sin\gamma &= \cot B\sin A + \cos\gamma\cos A;\\
\cot\gamma\sin\alpha &= \cot C\sin B + \cos\alpha\cos B,\\
\cot\gamma\sin\beta &= \cot C\sin A + \cos\beta\cos A.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (68)$$

§. 115. Beziehungen zwischen zwei Seiten und den beiden gegenüberliegenden Winkeln.

Wenn man die erste der Gleichungen (68) mit $\sin\alpha\sin\beta$ multiplizirt; so kommt

$$\cos\alpha\sin^2\beta = \sin\alpha\sin\beta\cot A\sin C + \sin\alpha\sin\beta\cos\beta\cos C.$$

Setzt man auf der linken Seite dieser Gleichung $\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta$ und transponirt das Glied $\sin\alpha\sin\beta\cos\beta\cos C$; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$\cos\alpha - \cos\beta(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C) = \sin\alpha\sin\beta\cot A\sin C,$$

d. i. nach der dritten der Gleichungen (67)

$$\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta\cot A\sin C,$$

und da nach der ersten der Gleichungen (67)

$$\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma = \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

ist; so hat man

$$\sin\beta\sin\gamma\cos A = \sin\alpha\sin\beta\cot A\sin C,$$

und hieraus folgt

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin C}{\sin\gamma}.$$

Auf eine ähnliche Weise findet man

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta}.$$

Man hat also allgemein

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma}, \qquad \ldots\ldots (69)$$

oder auch

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

woraus folgt, daß ſich in einem ſphäriſchen Dreiecke die Sinus der Winkel wie die Sinus der gegenüberliegenden Seiten verhalten.

§. 116. Beziehungen zwiſchen den drei Winkeln und Einer Seite.

Wenn man in die erſte der Gleichungen (68) nach den Gleichungen (69) $\sin\beta = \frac{\sin B}{\sin A}\sin\alpha$ und demnach $\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}\sin^2\alpha}$ ſetzt, das in die letztere Wurzelgröße multiplizirte Glied auf Eine Seite bringt und die dadurch entſtehende Gleichung quadrirt; ſo ergibt ſich nach einigen Reduktionen

$$\cos^2 A - 2\cos A\sin B\sin C\cos\alpha + \sin^2 B\sin^2 C\cos^2\alpha = \cos^2 B\cos^2 C,$$

und mithin

$$\cos A - \sin B\sin C\cos\alpha = \pm\cos B\cos C$$

oder

$$\cos A = \pm\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha,$$

und analog

$$\cos B = \pm\cos A\cos C + \sin A\sin C\cos\beta,$$
$$\cos C = \pm\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos\gamma.$$

Um zu unterſuchen, ob in dieſen Formeln das Zeichen + oder das Zeichen − zu nehmen iſt; ſo erhält man aus der erſten der Gleichungen (68) nach vorgängiger Multiplikation mit $\sin A\sin C$

$$\cos A\sin^2 C = \cot\alpha\sin\beta\sin A\sin C - \cos\beta\sin A\sin C\cos C$$

und wenn man $\sin^2 C = 1 - \cos^2 C$ und $\sin\beta = \sin\alpha\frac{\sin B}{\sin A}$ ſetzt und gehörig reduzirt,

$$\cos A = \cos C(\cos A\cos C - \sin A\sin C\cos\beta) + \sin B\sin C\cos\alpha$$

Setzt man diesen Werth von $\cos A$ gleich dem vorhin erhaltenen; so kommt

$$\pm\cos B = \cos A\cos C - \sin A\sin C\cos\beta.$$

Ließe man nun in dieser und in den obigen drei Gleichungen das Zeichen + gelten; so würde nach der letzteren Gleichung

$$\cos B = \cos A\cos C - \sin A\sin C\cos\beta$$

und nach der obigen

$$\cos B = \cos A\cos C + \sin A\sin C\cos\beta$$

sein, was offenbar unmöglich ist. Hieraus folgt, daß man in den fraglichen Gleichungen nur das Zeichen — nehmen darf, und daß sich dieselben daher auf

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha,\\ \cos B &= -\cos A\cos C + \sin A\sin C\cos\beta,\\ \cos C &= -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos\gamma\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (70)$$

reduziren.

Die unter (67), (68), (69) und (70) enthaltenen 15 Gleichungen reichen aus, um in allen möglichen Fällen die Auflösung eines sphärischen Dreiecks aus drei gegebenen Elementen zu bewirken. Wie diese Gleichungen behuf einer logarithmischen Berechnung umgeformt werden können, gehört nicht zu dem Gegenstande der vorliegenden Schrift: wir schreiten daher zu einigen anderen Anwendungen der Theorie der imaginären Zahlen auf die Geometrie im Raume.

Analytische Darstellung einer Kurve im Raume oder einer Fläche vermittelst Koordinaten.

§. 117. Die Lage eines stetigen linearen Zuges oder einer Kurve im Raume wird genau bekannt sein, wenn man durch eine allgemeine Formel die Länge und die Richtung des Vektorradius angibt, welcher von einem als fest angenommenen Nullpunkte oder dem Anfangspunkte des Koordinatensystemes aus zu irgend einem Punkte der gegebenen Kurve führt. Bezeichnet

man die absolute Länge eines solchen Vektorradius mit ϱ; so wird derselben sowol seiner Länge, wie seiner Richtung nach mit Hülfe der drei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z, welche resp. in den Richtungen der primären, sekundären und tertiären Axe OX, OY, OZ liegen, arithmetisch durch

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots.(71)$$

dargestellt.

Da im Allgemeinen Ein und dieselbe primäre Abszisse x offenbar nur einem einzigen Punkte der Kurve oder einem einzigen Vektor ϱ entsprechen kann; so folgt, daß der Werth des vorstehenden Ausdruckes für (ϱ) vollkommen bestimmt sein muß, wenn man für x irgend einen bestimmten Werth einführt, oder auch, daß die sekundäre und tertiäre Ordinate y und z Funktionen von x sein müssen, welche durch die Natur der Kurve in einem jeden speziellen Falle zu ermitteln sind. Damit also die Gleichung (71) eine Kurve im Raume darstellen könne, hat man mit derselben die beiden Gleichungen

$$y = F_1(x) \text{ und } z = F_2(x) \qquad \ldots.(72)$$

zu verbinden oder

$$(\varrho) = x + F_1(x).\sqrt{-1} + F_2(x).\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots.(73)$$

zu setzen, worin nun x die einzige willkürlich Veränderliche bleibt.

Außerdem leuchtet ein, daß die Gleichung

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1}$$

die Projektion der Kurve auf die Ebene XY, ferner die Gleichung

$$(\varrho) = x + z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

die Projektion auf die Ebene XZ und endlich die Gleichung

$$(\varrho) = y\sqrt{-1} + z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

die Projektion auf die Ebene YZ darstellen wird.

Wenn die Gleichung (71) die verschiedenen Vektoren darstellen soll, welche den Punkten einer stetigen Fläche angehören; so wird es im Allgemeinen für jede Abszisse x noch eine unendliche Menge von Punkten in der fraglichen Fläche geben. Der

Werth von (ϱ) kann also noch nicht bestimmt sein, wenn der von x gegeben ist. Dies wird erst dann der Fall sein, wenn neben dem Werthe von x auch der von y gegeben ist. Man erkennt, daß wenn die Gleichung

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{\mp 1}\sqrt{-1}$$

eine Fläche darstellen soll, sowol x, wie y willkürlich veränderlich bleiben und z eine Funktion von beiden, also

$$z = \mathrm{F}(x, y) \qquad \ldots\ldots (74)$$

ist, sodaß die verschiedenen Vektoren der Fläche durch

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} + \mathrm{F}(x, y).\sqrt{\mp 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (75)$$

dargestellt werden. Die Natur der Funktion F hängt auch hier von dem besonderen Charakter der gegebenen Fläche ab.

Es ist klar, daß wenn α die Deklination und φ die Inklination des Vektors ϱ für eine Kurve oder eine Fläche bezeichnet, immer

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\varrho},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{z}{y}$$

ist, und daß überhaupt sämmtliche Gleichungen des §s. 110 Richtigkeit behalten, wenn man darin ϱ für a substituirt. Mit Hülfe dieser letzteren Gleichungen wird man auch im Stande sein, die Kurve oder Fläche auf die Polarkoordinaten ϱ, α und φ zu beziehen, wenn Solches in irgend einem Falle wünschenswerth erscheinen sollte.

§. 118. **Darstellung irgend eines Vektors, welcher aus seiner ursprünglichen Lage zuvörderst um die primäre Axe OX in der Richtung von Y nach Z um den Winkel φ, alsdann um die sekundäre Axe OY in der Richtung von Z nach X um den Winkel ψ und endlich um die tertiäre Axe OZ in der Richtung von X nach Y um den Winkel χ gedrehet ist.**

Der Ausdruck des fraglichen Vektors in der ursprünglichen Lage sei

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(76)$$

Wird dieser Vektor um die primäre Axe OX in der Richtung YZ um den Winkel φ gedrehet; so entspricht Dies nach §. 108 einer Multiplikation des sekundären und tertiären Gliedes der vorstehenden Gleichung mit dem Faktor $\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{\div 1}$, wobei $\sqrt{\div 1} \times \sqrt{\div 1} = \div 1 = -1$ zu setzen ist. Hiernach erhält man für den um OX gedreheten Vektor

$$(\varrho) = x + (y\cos\varphi - z\sin\varphi)\sqrt{-1} + (y\sin\varphi + z\cos\varphi)\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

oder

$$(\varrho) = x_1 + y_1\sqrt{-1} + z_1\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}, \qquad \ldots\ldots(77)$$

worin

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x, \\ y_1 &= y\cos\varphi - z\sin\varphi, \\ z_1 &= y\sin\varphi + z\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(78)$$

ist.

Nimmt man jetzt OY zur primären, OZ zur sekundären und OX zur tertiären Axe an; so wird der Ausdruck des neuen Vektors

$$(\varrho) = y_1 + z_1\sqrt{-1} + x_1\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}.$$

Einer Drehung dieses neuen Vektors um die jetzt als primär anzusehende Axe OY in der Richtung ZX um den Winkel ψ entspricht in ähnlicher Weise, wie vorhin, eine Multiplikation des sekundären und tertiären Theiles der vorstehenden Gleichung mit dem Faktor $\cos\psi + \sin\psi.\sqrt{\div 1}$. Dies ergibt

$$(\varrho) = y_1 + (z_1\cos\psi - x_1\sin\psi)\sqrt{-1} + (z_1\sin\psi + x_1\cos\psi)\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},$$

oder wenn man jetzt wieder OX zur primären, OY zur sekundären und OZ zu tertiären Axe annimmt,

$$(\varrho) = (z_1\sin\psi + x_1\cos\psi) + y_1\sqrt{-1} + (z_1\cos\psi - x_1\sin\psi)\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}.$$

oder auch

$$(\varrho)=x_2+y_2\sqrt{-1}+z_2\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(79)$$

wenn man, nach vorgängiger Substitution der Werthe für x_1, y_1, z_1 aus den Gleichungen (78),

$$\left.\begin{aligned} x_2&=x\cos\psi+y\sin\varphi\sin\psi+z\cos\varphi\sin\psi,\\ y_2&=y\cos\varphi-z\sin\varphi,\\ z_2&=-x\sin\psi+y\sin\varphi\cos\psi+z\cos\varphi\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(80)$$

setzt.

Wird endlich OZ zur primären, OX zur sekundären und OY zur tertiären Axe angenommen; so wird der Ausdruck des neuen Vektors

$$(\varrho)=z_2+x_2\sqrt{-1}+y_2\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}.$$

Soll derselbe endlich um die Axe OZ in der Richtung XY um den Winkel χ gedrehet werden; so hat man das sekundäre und tertiäre Glied der vorstehenden Gleichung mit dem Faktor $\cos\chi+\sin\chi.\sqrt{\div 1}$ zu multipliziren. Dies gibt

$$(\varrho)=z_2+(x_2\cos\chi-y_2\sin\chi)\sqrt{-1}+(x_2\sin\chi+y_2\cos\chi)\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},$$

oder wenn man wiederum OX zur primären, OY zur sekundären und OZ zur tertiären Axe annimmt,

$$(\varrho)=(x_2\cos\chi-y_2\sin\chi)+(x_2\sin\chi+y_2\cos\chi)\sqrt{-1}+z_2\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}.$$

Bezeichnet man die Koordinaten des letzteren Werthes von (ϱ) längs der Axen OX, OY, OZ resp. mit x', y', z', setzt also

$$(\varrho)=x'+y'\sqrt{-1}+z'\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}; \quad \ldots\ldots(81)$$

so erhält man nach gehöriger Substitution der Werthe von x_2, y^2, z_2 aus den Gleichungen (80)

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos\psi\cos\chi+y(\sin\varphi\sin\psi\cos\chi-\cos\varphi\sin\chi)\\ &\quad+z(\cos\varphi\sin\psi\cos\chi+\sin\varphi\sin\chi),\\ y'&=x\cos\psi\sin\chi+y(\sin\varphi\sin\psi\sin\chi+\cos\varphi\cos\chi)\\ &\quad+z(\cos\varphi\sin\psi\sin\chi-\sin\varphi\cos\chi),\\ z'&=-x\sin\psi+y\sin\varphi\cos\psi+z\cos\varphi\cos\psi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(82)$$

Für irgend einen Vektor von beliebiger Länge ϱ, welcher vor diesen Drehungen mit der Axe OX zusammengefallen und demnach durch

$$(\varrho) = \varrho$$

dargestellt wäre, sodaß man in Gleichung (76)

$$x = \varrho,\ y = 0,\ z = 0$$

hätte, wurde man also nach der Drehung

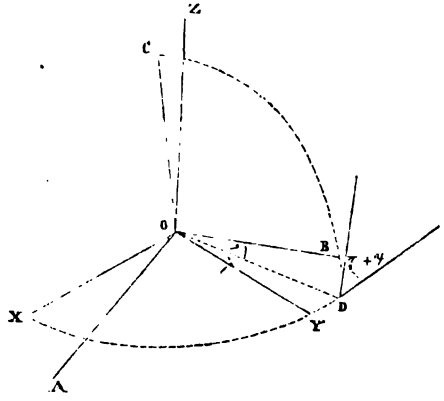
$$x' = \varrho \cos\psi \cos\chi,$$
$$y' = \varrho \cos\psi \sin\chi,$$
$$z' = -\varrho \sin\psi,$$

also statt der Gleichung (81)

$$(\varrho) = \varrho\cos\psi\cos\chi + \varrho\cos\psi\sin\chi \cdot \sqrt{-1} - \varrho\sin\psi \cdot \sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

haben.

Wenn dieser Vektor nach der Drehung in die Lage OA gekommen ist, und man bezeichnet die Neigungswinkel AOX,



AOY, AOZ desselben gegen die Axen OX, OY, OZ resp. mit α', β', γ'; so hat man nach den Gleichungen (32), (36) und (40), wenn man darin die vorstehenden Werthe für x', y', z' substituirt,

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha' &= \cos\psi\cos\chi, \\ \cos\beta' &= \cos\psi\sin\chi, \\ \cos\gamma' &= -\sin\psi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (83)$$

Für einen anderen Vektor, welcher vor der Drehung mit der Axe OY zusammengefallen, also durch

$$(\varrho) = \varrho\sqrt{-1}$$

dargestellt wäre, sodaß man in Gleichung (76)

$$x = 0,\ y = \varrho,\ z = 0$$

hätte, würde man nach der Drehung

$$\begin{aligned} x' &= \varrho(\sin\varphi\sin\psi\cos\chi - \cos\varphi\sin\chi),\\ y' &= \varrho(\sin\varphi\sin\psi\sin\chi + \cos\varphi\cos\chi),\\ z' &= \varrho\sin\varphi\cos\psi \end{aligned}$$

haben.

Wenn dieser Vektor nach der Drehung in die Lage OB gekommen ist, und man bezeichnet die Neigungswinkel BOX, BOY, BOZ desselben gegen die Axen OX, OY, OZ resp. mit α'', β'', γ''; so ergeben die Gleichungen (32), (36) und (40)

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha'' &= \sin\varphi\sin\psi\cos\chi - \cos\varphi\sin\chi,\\ \cos\beta'' &= \sin\varphi\sin\psi\sin\chi + \cos\varphi\cos\chi,\\ \cos\gamma'' &= \sin\varphi\cos\psi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (84)$$

Für einen dritten Vektor, welcher vor der Drehung mit der Axe OZ zusammengefallen, also durch

$$(\varrho) = \varrho\sqrt{+1}\sqrt{-1}$$

dargestellt wäre, sodaß man in Gleichung (76)

$$x = 0,\ y = 0,\ z = \varrho$$

hätte, würde man nach der Drehung

$$\begin{aligned} x' &= \varrho(\cos\varphi\sin\psi\cos\chi + \sin\varphi\sin\chi),\\ y'' &= \varrho(\cos\varphi\sin\psi\sin\chi - \sin\psi\cos\chi),\\ z' &= \varrho\cos\varphi\cos\psi \end{aligned}$$

haben.

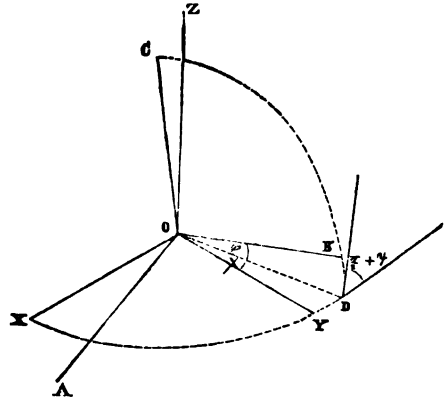
Wenn dieser Vektor nach der Drehung in die Lage OC gekommen ist, und man bezeichnet die Neigungswinkel COX, COY, COZ desselben gegen die Axen OX, OY, OZ resp. mit α''', β''', γ'''; so erhält man aus den Gleichungen (32), (36) und (40)

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha''' &= \cos\varphi\sin\psi\cos\chi + \sin\varphi\sin\chi,\\ \cos\beta''' &= \cos\varphi\sin\psi\sin\chi - \sin\varphi\cos\chi,\\ \cos\gamma''' &= \cos\varphi\cos\psi.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(85)$$

Vermöge der Gleichungen (83), (84), (85) lassen sich die Formeln (82) auch in folgende Form bringen

$$\left.\begin{aligned}x' &= x\cos\alpha' + y\cos\alpha'' + z\cos\alpha''',\\ y' &= x\cos\beta' + y\cos\beta'' + z\cos\beta''',\\ z' &= x\cos\gamma' + y\cos\gamma'' + z\cos\gamma'''.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(86)$$

Wenn man die verschiedenen Lagen verfolgt, in welche eine Ebene sukzessive gelangt, die vor der Drehung mit der Koordinatenebene YOZ und nach der Drehung mit der Ebene BOC



zusammenfällt; so erkennt man, daß die Linie OC in einer Ebene COB liegen wird, deren gemeinschaftliche Durchschnittslinie OD mit der Ebene XOY sich gegen die Axe OX (nach OY herum) unter dem Winkel $DOX = \frac{\pi}{2} + \chi$ neigt, die Ebene COB selbst bildet mit der Ebene XOY den Winkel $\frac{\pi}{2} + \psi$ (welcher so gerechnet ist, als wenn er durch eine Drehung der Ebene XOY um OY in der Richtung ZX erzeugt wäre) und die Linie OC neigt sich gegen die Durchschnittslinie der beiden Ebenen

COB und XOY unter dem Winkel $COD = \frac{\pi}{2} + \varphi$, während sich die Linie OB unter dem Winkel $BOD = \varphi$ gegen diese Durchschnittslinie neigt.

Die neun Größen $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$, $\cos\alpha'''$, $\cos\beta'''$, $\cos\gamma'''$, welche wir der Kürze wegen resp. mit a', b', c', a'', b'', c'', a''', b''', c''' bezeichnen wollen, sind durch die Gleichungen (83), (84), 85) voneinander abhängig. Da auf den rechten Seiten dieser Gleichungen nur drei beliebig zu verändernde Größen φ, ψ, χ vorkommen; so sieht man, daß von den ersteren Größen höchstens drei gegeben sein können, wodurch die übrigen sechs von selbst bestimmt sind.

Die zwischen jenen Größen stattfindenden Beziehungen stellen sich unmittelbar heraus, wenn man beachtet, daß α', β', γ' die Winkel sind, welche Ein und dieselbe Gerade OA mit drei rechtwinkligen Axen OX, OY, OZ einschließt, daß α'', β''; γ'' und α''', β''', γ''' ähnliche Bedeutungen resp. für die Linien OB und OC haben. Hiernach hat man wegen Gleichung (42)

$$\left.\begin{aligned} a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, \\ a'''^2 + b'''^2 + c'''^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (87)$$

Beachtet man ferner, daß sowol die beiden Linien OA und OB, wie OA und OC, wie OB und OC rechtwinklig aufeinander stehen; so hat man wegen Gleichung (58)

$$\left.\begin{aligned} a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a'a''' + b'b''' + c'c''' &= 0, \\ a''a''' + b''b''' + c''c''' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (88)$$

Da α', α'', α''' und β', β'', β''' und γ', γ'', γ''' resp. die Winkel sind, welche Ein und dieselbe Gerade OX oder OY oder OZ resp. mit den drei rechtwinklig aufeinander stehenden Linien OA, OB, OC einschließt; so hat man auch

$$\left.\begin{aligned} a'^2 + a''^2 + a'''^2 &= 1, \\ b'^2 + b''^2 + b'''^2 &= 1, \\ c'^2 + c''^2 + c'''^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (89)$$

und da auch ſowol die beiden Linien OX und OY, wie OX und OZ, wie OY und OZ rechtwinklig aufeinander ſtehen,

$$\left.\begin{aligned} a'b' + a''b'' + a'''b''' &= 0, \\ a'c' + a''c'' + a'''c''' &= 0, \\ b'c' + b''c'' + b'''c''' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (90)$$

Die letzten ſechs Gleichungen (89) und (90), welche ſich ebenſo, wie die Gleichungen (87) und (88) vermittelſt der Formeln (83), (84), (85) variſiziren laſſen, ſind von den Gleichungen (87) und (88) abhängig, und können neben dieſen nicht als ſelbſtſtändige Gleichungen angeſehen werden.

Behuf ſpäterer Reduktionen verdienen hier noch folgende Beziehungen zwiſchen den vorſtehenden Größen angegeben zu werden.

Wenn man die erſte der Gleichungen (88) mit c''' die zweite mit c'' multiplizirt, alsdann beide ſubtrahirt, und in ähnlicher Weiſe mit den übrigen dieſer Gleichungen verfährt; ſo erhält man nach und nach

$$\left.\begin{aligned} \frac{a'}{b'} &= -\frac{b''c''' - b'''c''}{a''c''' - a'''c''}, \\ \frac{a'}{c'} &= \frac{b''c''' - b'''c''}{a''b''' - a'''b''}, \\ \frac{b'}{c'} &= -\frac{a''c''' - a'''c''}{a''b''' - a'''b''}, \\ \frac{a''}{b''} &= -\frac{b'''c' - b'c'''}{a'''c' - a'c'''}, \\ \frac{a''}{c''} &= \frac{b'''c' - b'c'''}{a'''b' - a'b'''}, \\ \frac{b''}{c''} &= -\frac{a'''c' - a'c'''}{a'''b' - a'b'''}, \\ \frac{a'''}{b'''} &= -\frac{b'c'' - b''c'}{a'c'' - a''c'}, \\ \frac{a'''}{c'''} &= \frac{b'c'' - b''c'}{a'b'' - a''b'}, \\ \frac{b'''}{c'''} &= -\frac{a'c'' - a''c'}{a'b'' - a''b'}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (91)$$

Wenn man in gleicher Weise die erste der Gleichungen (90) mit c''', die zweite mit b''' multiplizirt, alsdann beide subtrahirt, und in ähnlicher Weise mit den übrigen dieser Gleichungen verfährt; so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a'}{a''} &= -\frac{b''c''' - b'''c''}{b'c''' - b'''c'}, \\
\frac{a'}{a'''} &= \frac{b''c''' - b'''c''}{b'c'' - b''c'}, \\
\frac{a''}{a'''} &= -\frac{b'c''' - b'''c'}{b'c'' - b''c'}, \\
\frac{b'}{b''} &= -\frac{a''c''' - a'''c''}{a'c''' - a'''c'}, \\
\frac{b'}{b'''} &= \frac{a''c''' - a'''c''}{a'c'' - a''c'}, \\
\frac{b''}{b'''} &= -\frac{a'c''' - a'''c'}{a'c'' - a''c'}, \\
\frac{c'}{c''} &= -\frac{a''b''' - a'''b''}{a'b''' - a'''b'}, \\
\frac{c'}{c'''} &= -\frac{a''b''' - a'''b''}{a'b'' - a''b'}, \\
\frac{c''}{c'''} &= -\frac{a'b''' - a'''b'}{a'b'' - a''b'}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (92)$$

Durch die Gleichungen (86) sind die Koordinaten x', y', z' des in der oben angegebenen Weise um die Axen gedreheten Vektors als Funktionen der Koordinaten x, y, z dieses Vektors vor der Drehung bestimmt. Wollte man, umgekehrt, x, y, z als Funktionen von x', y', z' angeben; so braucht man nur die erste, zweite, dritte der Gleichungen (86) Ein Mal resp. mit $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ zu multipliziren und dieselben alsdann zu addiren, alsdann jene Gleichungen resp. mit $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$ zu multipliziren und wiederum zu addiren, endlich jene Gleichungen resp. mit $\cos\alpha'''$, $\cos\beta'''$, $\cos\gamma'''$ zu multipliziren und darauf zu addiren. Dies ergibt mit Berücksichtigung der Beziehungen (87) und (88)

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha' + y'\cos\beta' + z'\cos\gamma', \\ y &= x'\cos\alpha'' + y'\cos\beta'' + z'\cos\gamma'', \\ z &= x'\cos\alpha''' + y'\cos\beta''' + z'\cos\gamma'''. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (93).$$

§. 119. Die im vorhergehenden Paragraphe angegebene Drehung irgend eines Vektors sukzessive um die drei rechtwinkligen Axen OX, OY, OZ kann wie eine Drehung desselben um eine einzige durch den Nullpunkt gehende Axe OQ angesehen werden.

Wenn der vorstehend ausgesprochene Satz Richtigkeit haben soll; so muß es im Raume eine durch den Nullpunkt gehende Linie OQ geben, welche während der obigen Drehung um die Axen OX, OY, OZ ihre Lage nicht ändert; diese Linie ist alsdann die Axe, um welche man annehmen kann, daß sich ein jeder andere Vektor oder jeder Punkt im Raume bei der vorhin beschriebenen Operation gedrehet habe. Sind nun für irgend einen Punkt der Linie OQ die Koordinaten vor der Drehung resp. $= x, y, z$; so müssen dieselben auch nach der Drehung resp. $= x, y, z$ sein, oder man muß haben, wenn man sowol in den Gleichungen (86), wie (93) $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ setzt,

$$\begin{aligned} x &= a'x + a''y + a'''z, \\ y &= b'x + b''y + b'''z, \\ z &= c'x + c''y + c'''z \end{aligned}$$

und auch

$$\begin{aligned} x &= a'x + b'y + c'z, \\ y &= a''x + b''y + c''z, \\ z &= a'''x + b'''y + c'''z. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der ersten und vierten, der zweiten und fünften, der dritten und sechsten dieser Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} (a'' - b')y - (c' - a''')z &= 0, \\ -(a'' - b')x + (b''' - c')z &= 0, \\ -(c' - a''')x + (b''' - c')y &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{z} &= \frac{c' - a'''}{a'' - b'}, \\ \frac{x}{z} &= \frac{b''' - c''}{a'' - b'}, \\ \frac{x}{y} &= \frac{b''' - c''}{c' - a'''}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (94)$$

Von den letzteren drei Gleichungen bedingen je zwei die dritte.

Da nun der durch dieſe Werthe von x, y, z beſtimmte Punkt Q im Raume ſeine Lage während der Drehung nicht ändert, und außerdem auch der Nullpunkt O keine Verrückung erleidet; ſo folgt, daß die ganze durch O und Q gelegte Linie während der obigen Drehung ihre Lage beibehält, und daß dieſelbe wie eine Axe angeſehen werden kann, um welche ſämmtliche Punkte des Raumes gedrehet ſind. Weiter unten wird man übrigens noch ſehen, daß die Werthe von x, y, z aus den Gleichungen (94), wenn ſie in die Formel

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

ſubſtituirt und als veränderliche, von x oder y oder z durch jene Gleichungen abhängige Größen angeſehen werden, die verſchiedenen Punkte einer einzigen durch O gehenden Linie OQ darſtellen.

Wenn man die Neigungswinkel dieſer Linie OQ gegen die drei Axen OX, OY, OZ reſp. durch λ, μ, ν bezeichnet; ſo erhält man durch Subſtitution der Werthe aus den Gleichungen (94) in die bekannten Formeln

$$\cos\lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2}} \text{ etc.}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{b''' - c''}{\sqrt{(a'' - b')^2 + (c' - a''')^2 + (b''' - c'')^2}} \\ \cos\mu &= \frac{b' - a'''}{\sqrt{(a'' - b')^2 + (c' - a''')^2 + (b''' - c'')^2}}, \\ \cos\nu &= \frac{a'' - b'}{\sqrt{(a'' - b')^2 + (c' - a''')^2 + (b''' - c'')^2}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (95)$$

in welchen Gleichungen die Wurzelgröße poſitiv zu nehmen iſt.

Um die Größe des Winkels zu bestimmen, um welchen sich ein jeder Punkt des Raumes bei der obigen Drehung um die Axe OQ gedrehet hat; so sei irgend ein Vektor OM vor der Drehung durch

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},$$

und nach der Drehung, wo der Endpunkt M desselben in den Punkt M′ kommt, sei der Vektor OM′, dessen Länge = OM sein wird, durch

$$(\varrho) = x' + y'\sqrt{-1} + z'\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

dargestellt, wobei zwischen den Größen x, y, z und x', y', z' die Beziehungen (86) stattfinden.

Bezeichnet man nun den Winkel MOM′, welcher die Richtung des Vektors ϱ vor der Drehung mit der Richtung desselben nach der Drehung einschließt, mit ω; so hat man nach Gleichung (55)

$$\cos\omega = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

oder, da $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \varrho$ ist,

$$\varrho^2\cos\omega = xx' + yy' + zz'.$$

Substituirt man hierin für x', y', z' ihre Werthe aus den Gleichungen (86); so kommt

$$\varrho^2\cos\omega = a'x^2 + b''y^2 + c'''z^2 + (a''+b')xy + (a'''+c')xz + (b'''+c'')yz \quad \ldots\ldots (96)$$

Es leuchtet ein, daß wenn der Vektor OM auf der Umdrehungsaxe OQ perpendikular steht, der durch vorstehende Gleichung gegebene Werth von ω die Größe des gesuchten Winkels darstellt, um welchen sich ein jeder Punkt des Raumes um OQ gedrehet hat. Daß aber OM auf OQ perpendikular stehe, wird nach Gleichung (58) durch

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cos\lambda + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cos\mu + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cos\nu = 0$$

oder wenn man für $\cos\lambda$, $\cos\beta$, $\cos\nu$ ihre Werthe aus den Gleichungen (95) substituirt und gehörig reduzirt, durch

$$(b'''-c'')x+(c'-a''')y+(a''-b')z=0 \quad \ldots\ldots (97)$$

ausgedrückt.

Nimmt man nun der Kürze wegen noch an, daß die Länge $OM=\varrho$ des zuletzt in Frage gebrachten Vektors gleich der Einheit ſei, verbindet alſo mit der vorſtehenden Gleichung die Beziehung

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

und eliminirt mit Hülfe dieſer und der vorhergehenden die beiden Größen y und z aus der Gleichung (96); ſo erhält man einen Ausdruck, in welchem die in x multiplizirten Glieder verſchwinden, und welcher ſich auf

$$\cos\omega=\frac{b''(a''-b')^2+c'''(c'-a''')^2-(b'''+c'')(a''-b')(c'-a''')}{(a''-b')^2+(c'-a''')^2} \ldots (98)$$

reduzirt. Wenn man dagegen x und z aus Gleichung (96) eliminirt hätte; ſo würden in dem daraus erhaltenen Ausdrucke die in y multiplizirten Glieder verſchwinden, und derſelbe würde ſich auf

$$\cos\omega=\frac{a'(a''-b')^2+c'''(b'''-c'')^2-(a'''+c')(a''-b')(b'''-c'')}{(a''-b')^2+(b'''-c'')^2} \ldots (99)$$

reduziren. Eine Elimination von x und y aus Gleichung (96) würde endlich

$$\cos\omega=\frac{a'(c'-a''')^2+b''(b'''-c'')^2-(a''+b')(c'-a''')(b'''-c'')}{(c'-a''')^2+(b'''-c'')^2} \ldots (100)$$

ergeben. Die vorſtehenden drei Ausdrücke für $\cos\omega$ ſind wegen der zwiſchen den Größen a', b', c', a'', b'' etc. beſtehenden Beziehungen identiſch.

§. 120. Darſtellung irgend eines Punktes im Raume, welcher neben der in §. 118 angegebenen Drehung noch in paralleler Richtung zu den Axen OX, OY, OZ reſp. um die Längen a, b, c verrückt iſt.

Nach §. 118 leuchtet ein, daß die Koordinaten x', y', z' dieſes Punktes nach der Drehung und Verrückung als Funktionen

der Koordinaten x, y, z desselben vor der Drehung und Verrückung durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x\cos\alpha' + y\cos\alpha'' + z\cos\alpha''', \\ y' &= b + x\cos\beta' + y\cos\beta'' + z\cos\beta''', \\ z' &= c + x\cos\gamma' + y\cos\gamma'' + z\cos\gamma''', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (101)$$

und daß, umgekehrt, die Koordinaten x, y, z als Funktionen von x', y', z', durch die Formeln

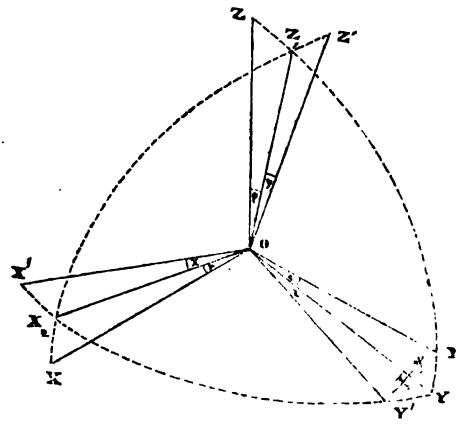
$$\left.\begin{aligned} x &= (x'-a)\cos\alpha' + (y'-b)\cos\beta' + (z'-c)\cos\gamma', \\ y &= (x'-a)\cos\alpha'' + (y'-b)\cos\beta'' + (z'-c)\cos\gamma'', \\ z &= (x'-a)\cos\alpha''' + (y'-b)\cos\beta''' + (z'-c)\cos\gamma''' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (102)$$

dargestellt sind.

§. 121. **Koordinatenverwandelung. – Übergang aus einem Systeme von rechtwinkligen Koordinaten in ein anderes ähnliches System mit demselben Anfangspunkte, dessen Axen gegen die früheren geneigt sind.**

OX, OY, OZ seien die drei rechtwinkligen Axen des ersten Systemes und x, y, z die entsprechenden Koordinaten irgend eines Punktes im Raume in Beziehung zu diesen Axen; ferner seien OX′, OY′, OZ′ die drei rechtwinkligen Axen des zweiten Systemes und x', y', z' die zugehörigen Koordinaten jenes Punktes in Beziehung zu den neuen Axen.

Wenn man sich die Lagen der neuen Axen OX′, OY′, OZ′ auf die Weise aus den Lagen der ursprünglichen Axen OX, OY, OZ erzeugt denkt, daß zuvörderst das ursprüngliche System um die Axe OX nach einer der früher (§. 118) angenommenen Richtung direkt entgegengesetzten Seite, also in der Richtung ZY um den Winkel φ gedrehet wird, wodurch man aus den Axen OX, OY, OZ die Axen OX, OY_1, OZ_1 erhalte, daß alsdann dieses System um die Axe OY_1 in der Richtung XZ_1 um den Winkel ψ gedrehet wird, wodurch man aus den letzteren Axen die Axen OX_2, OY_1, OZ′ erhalte, und daß endlich das letztere



System um die Axe OZ′ in der Richtung Y_1X_2 um den Winkel χ gedrehet wird, wodurch man aus demselben die Axen OX′, OY′, OZ′ erhält, wobei natürlich alle Punkte im Raume, deren Lagen durch Koordinaten dargestellt werden sollen, als unverrückt angesehen werden; so leuchtet ein, daß ein jeder feste Punkt im Raume gegen die gedreheten Axen OX′ OY′, OZ′ dieselbe Lage einnehmen wird, welche ein nach Vorschrift des §s 118 gedrehe-ter Punkt gegen die dortigen festen Axen erhielt, und daß die Koordinaten x', y', z' irgend eines Punktes in Beziehung zu dem zuletztgedachten Systeme durch die Formeln (82) des §s 118 als Funktionen der Koordinaten x, y, z des anfänglich gegebenen Systemes dargestellt werden.

In §. 118 wurde gewissermaaßen der mit Punkten erfüllte Raum als beweglich angesehen und um drei feste Axen OX, OY, OZ gedrehet, wobei drei Linien, welche vorher mit diesen Axen zusammenfielen, in Lagen OA, OB, OC kamen.

Im gegenwärtigen Paragraphe wird dagegen der Raum mit seinen Punkten als unbeweglich angesehen, während sich die beweglichen Axen OX, OY, OZ drehen und dabei in die Lagen OX′, OY′, OZ′ kommen.

Bei der Betrachtung des §s 118 wird ein jeder Vektor OM nach der Drehung gegen die drei rechtwinkligen Linien OA, OB, OC ebendieselbe Lage haben, die er vor der Drehung gegen die Axen OX, OY, OZ hatte; nach der Drehung werden also die Koordinaten des Punktes M in Beziehung zu den Axen

OA, OB, OC resp. x, y, z sein, während dieselben in Beziehung zu den festen Axen OX, OY, OZ resp. x', y', z' sind.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß die drei Linien OA, OB, OC des §s 118 genau die Stelle der ursprünglichen Axen OX, OY, OZ des gegenwärtigen Paragraphs und die drei Linien OX, OY, OZ des §s 118 die Stelle der neuen Axen OX', OY', OZ' des gegenwärtigen Paragraphs vertreten, und daß man unter Zugrundelegung der jetzigen Bezeichnung für die Winkel α', β', γ', α'', β'' etc. (s. Gl. 83, 84, 85)

$$\alpha' = X'OX,\ \beta' = Y'OX,\ \gamma' = Z'OX,$$
$$\alpha'' = X'OY,\ \beta'' = Y'OY,\ \gamma'' = Z'OY,$$
$$\alpha''' = X'OZ,\ \beta''' = Y'OZ,\ \gamma''' = Z'OZ$$

hat, zwischen deren Kosinus die Beziehungen (87) bis (92) stattfinden.

Hiernach behalten denn auch für die gegenwärtige Untersuchung die Gleichungen (86) und (93) Gültigkeit, welche die nöthigen Beziehungen zwischen den alten und neuen Koordinaten x, y, z und x', y', z' vermittelst der Neigungswinkel der Axen dieser beiden Koordinatensysteme ausdrücken.

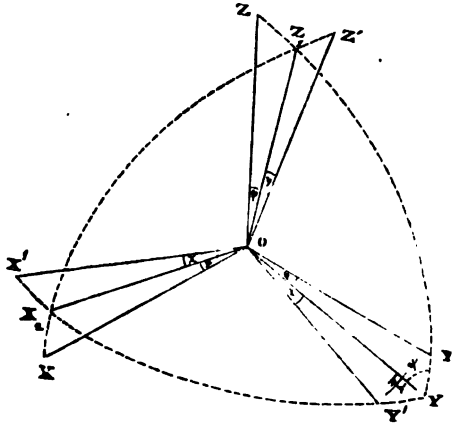
Wie vorhin bemerkt ist, kann die Lage der Axen OX', OY', OZ' so aus denen der Axen OX, OY, OZ erzeugt werden, daß man die Letzteren zuvörderst um OX und zwar um den Winkel φ in der Richtung ZY drehet, wodurch die ursprünglichen Axen in OX, OY_1, OZ_1 übergehen, daß man alsdann eine Drehung um OY_1 um den Winkel ψ in der Richtung XZ_1 vornimmt, wodurch sich die Axen OX_2, OY_1, OZ' ergeben, und daß man schließlich die letzteren Axen um OZ' in der Richtung Y_1X_2 um den Winkel χ drehet, wodurch man die Axen OX', OY', OZ' erhält.

Wenn man beachtet, daß die drei rechtwinkligen Linien OA, OB, OC aus §. 118 die jetzigen ursprünglichen Axen OX, OY, OZ vertreten, und daß die drei Axen OX, OY, OZ aus §. 118 an der Stelle der jetzigen verwandelten Axen OX', OY', OZ' stehen; so folgt aus der Entstehungsweise der Linien OA, OB, OC aus den Axen OX, OY, OZ des §s 118, daß sich im gegenwärtigen Falle die ursprünglichen Axen OX, OY, OZ aus den neuen Axen OX', OY', OZ' auch rückwärts auf die Weise

erzeugen laſſen, daß man die letzteren zuvörderſt um OX' in der Richtung $Y'Z'$ um den Winkel φ, darauf um OY' in der Richtung $Z'X'$ um den Winkel ψ und endlich um OZ' in der Richtung $X'Y'$ um den Winkel χ drehet.

Hieraus geht unmittelbar, wie in §. 118, hervor, daß ſich die urſprüngliche Koordinatenebene YZ unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}+\psi$ gegen die neue Ebene $X'Y'$ neigt, daß die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie dieſer beiden Ebenen mit der neuen Axe OX' den Winkel $\frac{\pi}{2}+\chi$ bildet und daß ſich die Axe OZ unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}+\varphi$ und die Axe OY unter dem Winkel φ gegen die erwähnte Durchſchnittslinie neigt.

Durch das Vorſtehende iſt die Lage der Ebene XY und der Axen OZ und OY gegen das neue Koordinatenſyſtem $X'Y'Z'$ beſtimmt. Will man, umgekehrt, in ähnlicher Weiſe die Lage des neuen Syſtemes gegen das alte beſtimmen; ſo findet man leicht, ſowol durch die Betrachtung des Aktes der im §. 118 unterſuchten, wie der im gegenwärtigen Paragraphe behandelten Drehung, daß ſich die Ebene $X'Y'$ unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}-\psi$ gegen die Ebene YZ neigt; die Durchſchnittslinie OY_1 dieſer beiden Ebenen bildet mit der Axe OY den Winkel $Y_1OY=-\varphi$; OY' neigt ſich unter dem Winkel $Y'OY_1=\chi$ und OX' unter dem



Winkel $X'OY_1 = \frac{\pi}{2} + \chi$ gegen jene Durchſchnittslinie. Hierbei iſt der Winkel $\frac{\pi}{2} - \psi$ ſo gerechnet, als wenn er durch eine Drehung der Ebene YZ um OY in der Richtung ZX entſtanden wäre, φ iſt von OY gegen OZ, $Y_1OY = -\varphi$ in entgegengeſetzter Richtung gerechnet und reſp. χ und $\frac{\pi}{2} + \chi$ ſind in derjenigen Richtung genommen, in welcher ſich die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie OY_1 der beiden Ebenen YZ und X'Y' bewegen müßte, um oberhalb der Ebene OZ zu bleiben.

Hiernach erkennt man, daß die Formeln (82), durch welche die Beziehungen zwiſchen den urſprünglichen und den neuen Koordinaten irgend eines Punktes nur von den drei Größen φ, ψ und χ abhängig gemacht werden, denen analog ſind, welche Euler in dieſer Abſicht zuerſt aufgeſtellt hat.

§. 122. Wenn neben der Veränderung der Richtungen der urſprünglichen Koordinatenaxen OX, OY, OZ nach Anleitung des vorhergehenden Paragraphes in OX', OY', OZ' auch noch der Anfangspunkt O parallel zu den urſprünglichen Axen OX, OY, OZ reſp. um die Entfernungen a, b, c nach O' verlegt würde, ſodaß a, b, c die Koordinaten des neuen Anfangspunktes O' in Beziehung zu dem alten Syſteme wären; ſo erkennt man ohne Schwierigkeit, mit Bezugnahme auf die Gleichungen (93), daß die Beziehungen zwiſchen den alten Koordinaten x, y, z irgend eines Punktes und den neuen x', y', z' desſelben durch

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha' + y'\cos\beta' + z'\cos\gamma', \\ y &= b + x'\cos\alpha'' + y'\cos\beta'' + z'\cos\gamma'', \\ z &= c + x'\cos\alpha''' + y'\cos\beta''' + z'\cos\gamma''', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (103)$$

oder auch durch

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha' + (y-b)\cos\alpha'' + (z-c)\cos\alpha''', \\ y' &= (x-a)\cos\beta' + (y-b)\cos\beta'' + (z-c)\cos\beta''', \\ z' &= (x-a)\cos\gamma' + (y-b)\cos\gamma'' + (z-c)\cos\gamma''', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (104)$$

gegeben ſind.

§. 122a. Übergang aus einem Syſteme von Polarkoordinaten in ein anderes von rechtwinkligen Koordinaten, und umgekehrt.

Um aus einem Syſteme von Polarkoordinaten ϱ, α, φ in ein anderes von rechtwinkligen Koordinaten x, y, z mit demſelben Anfangspunkte, oder umgekehrt, überzugehen, hat man ſich offenbar nach den Beziehungen (30) der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\alpha,\\ y &= \varrho\sin\alpha\cos\varphi,\\ z &= \varrho\sin\alpha\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad \ldots.(104^a)$$

zu bedienen, um daraus die Einen Koordinaten zu eliminiren und die geſuchten Beziehungen zwiſchen den anderen herzuſtellen.

Die gerade Linie im Raume.

§. 123. Es ſoll die Gleichung einer geraden Linie hergeſtellt werden, deren Lage durch folgenden Akt der Bewegung erzeugt iſt: Zuvörderſt fiel die gegebene Gerade, ehe ſie in die zu betrachtende Lage im Raume gelangte, mit der primären Axe OX zuſammen, wurde darauf um dieſe Axe in der Richtung YZ um den Winkel φ gedrehet (wobei ſie offenbar aus der anfänglichen Richtung noch nicht gekommen iſt), alsdann wurde ſie um die Axe OY in der Richtung ZX um den Winkel ψ, hierauf um die Axe OZ in der Richtung XY um den Winkel χ gedrehet und endlich in parallelen Richtungen zu den Axen OX, OY, OZ reſp. um die Entfernungen a, b, c verrückt.

Wenn die Gleichung irgend eines ſtetigen linearen Zuges vor der eben bemerkten Drehung

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{\mp 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots.(105)$$

und nach dieſer Drehung

$$(\varrho) = x' + y'\sqrt{-1} + z'\sqrt{\mp 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots.(106)$$

iſt, worin natürlich y und z Funktionen von x und ebenſo y' und z' Funktionen von x' ſein müſſen (§. 117); ſo ſtehen die

Werthe x, y, z und x', y', z', der Koordinaten irgend eines Punktes dieſes Zuges vor und nach der Drehung nach den in §. 118 angeſtellten Unterſuchungen in Beziehungen zueinander, die durch die Gleichungen (82) oder (86) oder (93) dargeſtellt ſind. Wenn neben der fraglichen Drehung noch eine Verrückung jenes Zuges in parallelen Richtungen zu den Axen OX, OY, OZ reſp. um die Entfernungen a, b, c ſtattgefunden hat; ſo treten an die Stelle der eben erwähnten Beziehungen die Gleichungen (101) oder (102).

Die Gleichung einer mit der Axe OX zuſammenfallenden Linie iſt nun offenbar

$$(\varrho) = x,$$

ſodaß man in Gleichung (105)

$$y = 0 \text{ und } z = 0$$

hat.

Subſtituirt man dieſe Werthe in die Gleichungen (101), worin die Koeffizienten $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$ etc. oder a', b', c', a'', b'' etc. die Bedeutungen aus den Gleichungen (83), (84) und (85) haben; ſo erhält man für die Koordinaten der gedrehten und verrückten Linie

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x\cos\alpha', \\ y' &= b + x\cos\beta', \\ z' &= c + x\cos\gamma'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (107)$$

Eliminirt man zwiſchen dieſen Gleichungen die Größe x; ſo erhält man y' und z' als Funktionen der unabhängig Veränderlichen x', nämlich

$$\left.\begin{aligned} y' &= b + (x' - a)\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}, \\ z' &= c + (x' - a)\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (108)$$

Subſtituirt man endlich dieſe Werthe für y' und z' in Gleichung (106); ſo kommt für die Gleichung der in der obigen Weiſe

gedreheten und verrückten geraden Linie, welche anfänglich mit der Axe OX zusammenfiel,

$$(\varrho)=x'+\left[b+(x'-a)\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}\right]\sqrt{-1}+\left[c+(x'-a)\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}\right]\sqrt{+1}\sqrt{-1}$$

oder, wenn man jetzt die Abszisse x' ohne Akzent schreibt,

$$(\varrho)=x+\left[b+(x-a)\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}\right]\sqrt{-1}+\left[c+(x-a)\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}\right]\sqrt{+1}\sqrt{-1}\ldots.(109)$$

Führt man in diese Gleichung für $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ ihre Werthe in ψ und χ aus den Gleichungen (83) ein; so wird dieselbe

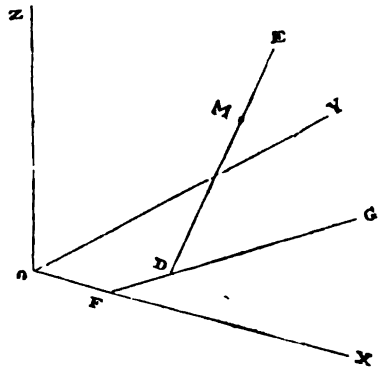
$$(\varrho)=x+[b+(x-a)\operatorname{tang}\chi]\sqrt{-1}+\left[c-(x-a)\frac{\operatorname{tang}\psi}{\cos\chi}\right]\sqrt{+1}\sqrt{-1}\ldots(110)$$

Man sieht, daß in dieser Gleichung der Winkel φ gar nicht erscheint, was sich schon im voraus einsehen ließ, da die erste Drehung der anfangs mit der primären Axe zusammenfallenden Linie um diese Axe keinen Einfluß auf die Lage haben kann, in welche dieselbe durch die späteren Drehungen um die sekundäre und tertiäre Axe gelangt.

Wenn man unter übrigens gleichen Umständen annimmt, die zweite Drehung der fraglichen Linie um die sekundäre Axe OY habe nicht in der Richtung ZX, sondern in der Richtung XZ um den Winkel ϑ stattgefunden; so hat man in der vorstehenden Gleichung offenbar $\psi=-\vartheta$ zu setzen. Sollen jedoch alle Drehungen um OY immer, als in der Richtung ZX erfolgt, angesehen werden; so hat man für den letzteren Fall $\psi=2\pi-\vartheta$ zu substituiren. Beides ergibt

$$(\varrho)=x+[b+(x-a)\operatorname{tang}\chi]\sqrt{-1}+\left[c+(x-a)\frac{\operatorname{tang}\vartheta}{\cos\chi}\right]\sqrt{+1}\sqrt{-1}\ldots(111)$$

Durch die vorstehende Gleichung wird allgemein eine gerade Linie DE dargestellt, welche sich unter dem Winkel $EDG=\vartheta$ gegen die Ebene XY neigt, welche in einer auf XY perpendikular stehenden Ebene EDG liegt, deren Durchschnitt FG mit der Ebene XY gegen die Axe OX unter dem Winkel $GFX=\chi$ geneigt ist und welche endlich durch einen Punkt M im Raume



geht, deſſen Koordinaten in den Richtungen der Axen OX, OY, OZ reſp. a, b, c ſind.

Die Projektion einer durch

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

dargeſtellten Linie auf die Ebene XY iſt durch

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1},$$

die auf die Ebene XZ durch

$$(\varrho) = x + z\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

und die auf die Ebene YZ durch

$$(\varrho) = y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

dargeſtellt. Da nun in Gleichung (109)

$$x = x,$$

$$y = b + (x-a)\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'},$$

$$z = c + (x-a)\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'},$$

alſo auch

$$z = c + (y-b)\frac{\cos\gamma'}{\cos\beta'}$$

iſt; ſo hat man für die Projektion jener Linie auf X Y

$$(\varrho) = x + \left[b + (x-a)\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}\right]\sqrt{-1}, \qquad \ldots\ldots (112)$$

für die Projektion auf XZ,

$$(\varrho) = x + \left[c + (x-a)\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}\right]\sqrt{+1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(113)$$

und für die Projektion auf YZ

$$(\varrho) = y\sqrt{-1} + \left[c + (y-b)\frac{\cos\gamma'}{\cos\beta'}\right]\sqrt{+1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(114)$$

Wenn man hierin für $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ ihre Werthe in ψ und χ oder in $-\vartheta$ und χ setzt; so erhält man für die Projektion der durch Gleichung (111) dargestellten Linie auf die Ebene XY

$$(\varrho) = x + [b + (x-a)\operatorname{tang}\chi]\sqrt{-1},$$

für die Projektion auf XZ

$$(\varrho) = x + \left[c + (x-a)\frac{\operatorname{tang}\vartheta}{\cos\chi}\right]\sqrt{+1}\sqrt{-1}$$

und für die Projektion auf YZ

$$(\varrho) = y\sqrt{-1} + \left[c + (y-b)\frac{\operatorname{tang}\vartheta}{\cos\chi}\right]\sqrt{+1}\sqrt{-1}.$$

Wenn man sich die durch Gleichung (109) dargestellte Linie parallel zu sich selbst an den Nullpunkt O getragen denkt, also $a=0$, $b=0$, $c=0$ setzt; so erhält man für dieselbe

$$(\varrho) = x + x\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}\sqrt{-1} + x\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}\sqrt{+1}\sqrt{-1},$$

und hat demnach für die Neigungswinkel λ, μ, ν derselben resp. gegen die Axen OX, OY, OZ wegen der Gleichungen (32), (36) und (40), wenn man beachtet, daß $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$ ist (Gleichungen 87),

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \cos\alpha', \text{ also } \lambda = \alpha', \\ \cos\mu &= \cos\beta', \quad \text{“} \quad \mu = \beta', \\ \cos\nu &= \cos\gamma', \quad \text{“} \quad \nu = \gamma'. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(115)$$

Hieraus geht hervor, daß die Gleichung der Linie DE mit

Hülfe ihrer Neigungswinkel gegen die drei Axen auch in der Form

$$(\varrho)=y+\left[b+(x-a)\frac{\cos\mu}{\cos\lambda}\right]\sqrt{-1}+\left[c+(x-a)\frac{\cos\nu}{\cos\lambda}\right]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots(116)$$

dargestellt werden kann.

Wenn $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ durch ϑ und χ ausgedrückt wird, sodaß dieser Fall der durch Gleichung (111) dargestellten Linie entspricht; so hat man

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda &= \cos\vartheta\cos\chi,\\ \cos\mu &= \cos\vartheta\sin\chi,\\ \cos\nu &= \sin\vartheta,\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(117)$$

also $\nu=\frac{\pi}{2}-\vartheta$, was auch der obigen Bemerkung über die Lage der Linie DE gegen die Ebene XY entspricht.

Wenn die Gleichung der Linie DE in der Form

$$(\varrho)=x+[b+(x-a)m]\sqrt{-1}+[c+(x-a)n]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(118)$$

gegeben wäre; so findet man leicht durch die Gleichungen

$$m=\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}=\frac{\cos\mu}{\cos\lambda} \text{ und}$$
$$n=\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}=\frac{\cos\nu}{\cos\lambda}$$

mit Hülfe der Beziehung

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$$

die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}},\\ \cos\mu &= \frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}},\\ \cos\nu &= \frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}},\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(119)$$

und auch wegen der Gleichungen (117) oder direkt wegen der Gleichung (111), worin man ebenfalls $m=\operatorname{tang}\chi$ und $n=\frac{\operatorname{tang}\vartheta}{\cos\chi}$ haben muß,

$$\left.\begin{aligned} \sin\vartheta &= \frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}} \\ \text{oder } \operatorname{tang}\vartheta &= \frac{n}{\sqrt{1+m^2}} \\ \text{und } \operatorname{tang}\chi &= m. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(120)$$

Wenn man durch die vorstehenden Gleichungen (119) und (120) die Richtung desjenigen Theiles der geraden Linie darstellen will, welcher mit der Axe OZ einen spitzen Winkel bildet, für welchen also $\cos\nu$ positiv sein muß; so hat man die Wurzelgröße $\sqrt{1+m^2+n^2}$ und auch $\sqrt{1+m^2}$ positiv zu nehmen, sobald n positiv ist, aber negativ, sobald n negativ ist.

§. 124. Gegeneinander geneigte, perpendikulare und parallele Linien.

Das System zweier gerader Linien, welche beide durch den Nullpunkt gehen, und von denen die Eine mit der Axe OX zusammenfällt und die andere in der Ebene XY liegt und sich unter dem Winkel ω gegen die erstere neigt, sodaß die erstere durch

$$(\varrho) = x \qquad \ldots\ldots(121)$$

und die letztere durch

$$(\varrho) = x + x\operatorname{tang}\omega.\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(122)$$

dargestellt ist, kann offenbar dadurch in jede beliebige Lage des Raumes gebracht werden, daß man dasselbe nachundnach um die Axen OX, OY, OZ resp. um die Winkel φ, ψ, χ drehet und außerdem parallel zu diesen Axen resp. um a, b, c verrückt. In dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte dieser beiden Linien, dessen Koordinaten nach der Drehung und Verrückung a, b, c sein werden, werden sich dieselben stets unter dem Winkel ω gegeneinander neigen.

Verrückt man hiernächst die zweite Linie nochmals in paralleler Richtung zu den drei Axen um beliebige Entfernungen, indem man die erste in der einmal angenommenen Lage läßt, was Dasselbe ist, als wenn man die obigen Drehungen zuvörderst mit beiden Linien gleichzeitig vornähme, darauf aber die erste Linie

parallel zu den Axen um a, b, c und die zweite um a_1, b_1, c_1 verrückte; so kann man die beiden Linien in jede Lage des Raumes bringen, sodaß sie, wenn sie in parallelen Richtungen aneinander getragen werden, stets den Winkel ω miteinander einschließen.

Im vorhergehenden Paragraphe hat man nun gesehen, daß die Gleichung der ersten Linie nach der Drehung und Verrückung

$$(\varrho)=x+\left[b+(x-a)\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}\right]\sqrt{-1}+\left[c+(x-a)\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}\right]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots(123)$$

wird, worin α', β', γ' auch resp. die Neigungswinkel λ, μ, ν dieser Linie gegen die drei Axen OX, OY, OZ darstellen (s. Gleichungen 115).

Um die Gleichung für die anfänglich durch Gleichung (122) dargestellte zweite Linie nach der Drehung und Verrückung herzustellen; so hat man wegen der Beziehungen (101) für die Koordinaten x', y', z' der so veränderten Linie, wenn man beachtet, daß hier $x=x$, $y=x\operatorname{tang}\omega$ und $z=0$ ist,

$$\left.\begin{aligned} x'&=a_1+x\cos\alpha'+x\operatorname{tang}\omega\cos\alpha'',\\ y'&=b_1+x\cos\beta'+x\operatorname{tang}\omega\cos\beta'',\\ z'&=c_1+x\cos\gamma'+x\operatorname{tang}\omega\cos\gamma''. \end{aligned}\right\} \quad \ldots.(124)$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen die Größe x; so kann man y' und z' als Funktionen von x' ausdrücken und die gesuchte Gleichung

$$(\varrho)=x'+y'\sqrt{-1}+z'\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

für die zweite Linie nach der Drehung und Verrückung darstellen.

Zu dem gegenwärtigen Zwecke ist diese Ausführung von keiner Wichtigkeit; es ist uns nur daran gelegen, die Neigungswinkel λ_1, μ_1, ν_1 dieser zweiten Gerade nach ihrer Veränderung gegen die drei Axen OX, OY, XZ kennen. Denkt man sich dieselbe zu diesem Ende parallel mit sich selbst an den Nullpunkt getragen, setzt also in den vorstehenden Ausdrücken (124) $a_1=0$, $b_1=0$, $c_1=0$; so werden jene Winkel durch die Formeln

$$\cos\lambda_1 = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad \cos\mu_1 = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

$$\cos\nu_1 = \frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

gegeben sein. Nimmt man die Substitutionen der Werthe für x', y', z' aus jenen Gleichungen wirklich vor; so kommt, wenn man die Beziehungen (87) und (88) beachtet,

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda_1 &= (\cos\alpha' + \operatorname{tang}\omega\cos\alpha'')\cos\omega,\\ \cos\mu_1 &= (\cos\beta' + \operatorname{tang}\omega\cos\beta'')\cos\omega,\\ \cos\nu_1 &= (\cos\gamma' + \operatorname{tang}\omega\cos\gamma'')\cos\omega,\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(125)$$

Da nun die Kosinus der Neigungswinkel λ, μ, ν der ersten Geraden nach der Drehung und Verrückung gegen die Axen resp.

$$\cos\lambda = \cos\alpha',\quad \cos\mu = \cos\beta',\quad \cos\nu = \cos\gamma'$$

sind; so erhält man

$$\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 =$$
$$\cos\alpha'(\cos\alpha' + \operatorname{tang}\omega\cos\alpha'')\cos\omega + \cos\beta'(\cos\beta' + \operatorname{tang}\omega\cos\beta'')\cos\omega$$
$$+ \cos\gamma'(\cos\gamma' + \operatorname{tang}\omega\cos\gamma'')\cos\omega,$$

d. i., wenn man die rechte Seite dieser Gleichung gehörig reduzirt und dabei die Beziehungen (87) und (88) berücksichtigt

$$\cos\omega = \cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 \quad \ldots.(126)$$

Dieses Resultat, wonach der Neigungswinkel ω zweier Geraden durch die Neigungswinkel derselben gegen drei rechtwinklige Axen ausgedrückt ist, stimmt mit dem der Gleichung (56) überein. Dasselbe ist hier nur nochmals für den allgemeineren Fall nachgewiesen worden, wo die beiden Geraden nicht durch den Nullpunkt gehen und sich auch nicht durchschneiden. Unter dem Neigungswinkel ω derselben wird hier der Winkel verstanden, welchen dieselben miteinander bilden, wenn sie in parallelen Richtungen aneinander getragen werden.

Wenn die Gleichungen der beiden Geraden in der Form der Gleichung (118) gegeben sind; so hat man offenbar

$$\cos\omega = \frac{1+mm_1+nn_1}{\sqrt{1+m^2+n^2}\sqrt{1+m_1^2+n_1^2}} \quad \ldots.(127)$$

Sollen die fraglichen beiden Linien im Raume eine perpendikulare Richtung gegeneinander haben; so muß $\omega = \frac{\pi}{2}$, also $\cos\omega = 0$ und daher

$$\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 = 0 \quad \ldots\ldots (128)$$

oder

$$1 + mm_1 + nn_1 = 0 \quad \ldots\ldots (129)$$

sein.

Sollen dieselben einander parallel sein; so muß man $\omega = 0$, also $\cos\omega = 1$, und daher

$$\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 = 1$$

haben. Da nun außerdem

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

und auch

$$\cos^2\lambda_1 + \cos^2\mu_1 + \cos^2\nu_1 = 1$$

ist; so erhält man, wenn man die erste der drei vorstehenden Gleichungen mit 2 multiplizirt und darauf von der Summe der beiden letzteren subtrahirt,

$$(\cos\lambda - \cos\lambda_1)^2 + (\cos\mu - \cos\mu_1)^2 + (\cos\nu - \cos\nu_1)^2 = 0,$$

eine Gleichung, welche nur durch die drei besonderen Gleichungen

$$\cos\lambda - \cos\lambda_1 = 0,\ \cos\mu - \cos\mu_1 = 0,\ \cos\nu - \cos\nu_1 = 0$$

oder

$$\cos\lambda = \cos\lambda_1,\ \cos\mu = \cos\mu_1,\ \cos\nu = \cos\nu_1$$

oder durch

$$\lambda = \lambda_1,\ \mu = \mu_1,\ \nu = \nu_1 \quad \ldots\ldots (130)$$

erfüllt werden kann. Hieraus folgt auch, daß man für diesen Fall

$$m = m_1 \text{ und } n = n_1 \quad \ldots\ldots (131)$$

haben müsse.

Die Ebene im Raume.

§. 125. Es soll die Gleichung einer Ebene dargestellt werden, deren Lage im Raume dadurch erzeugt ist, daß man dieselbe

zuerſt aus der Lage der Ebene XY um die Axe OX in der Richtung YZ um den Winkel φ, alsdann um die Axe OY in der Richtung ZX um den Winkel ψ, darauf um die Axe OZ in der Richtung XY um den Winkel χ drehet und alsdann parallel zu den Axen OX, OY, OZ reſp. um die Entfernungen a, b, c verrückte. Wenn

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots.(132)$$

die Gleichung irgend einer Fläche vor der obigen Drehung und Verrückung und

$$(\varrho)=x'+y'\sqrt{-1}+z'\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots.(133)$$

die Gleichung derſelben nach jener Drehung und Verrückung iſt, worin z eine Funktion von x und y und ebenſo z' eine Funktion von x' und y' ſein muß (§. 117); ſo ſind die Beziehungen, welche zwiſchen den Koordinaten x, y, z und x', y', z', ſtattfinden, offenbar durch die Gleichungen (101) oder (102) gegeben.

Soll nun durch Gleichung (132) eine Ebene dargeſtellt werden, welche mit der Koordinatenebene XY zuſammenfällt; ſo hat man darin offenbar $z=0$ zu ſetzen, ſodaß ſich dieſelbe auf

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1} \qquad \ldots.(134)$$

reduzirt. Die Gleichungen (101) werden hiernach

$$\left.\begin{aligned} x'&=a+x\cos\alpha'+y\cos\alpha'',\\ y'&=b+x\cos\beta'+y\cos\beta'',\\ z'&=c+x\cos\gamma'+y\cos\gamma'' \end{aligned}\right\} \qquad \ldots.(135)$$

Eine Elimination von x und y zwiſchen dieſen Gleichungen ergibt z' als Funktion von x' und y' in der Form

$$z'=c+\frac{[(y'-b)\cos\alpha''-(x'-a)\cos\beta'']\cos\gamma'+[(x'-a)\cos\beta'-(y'-b)\cos\alpha']\cos\gamma''}{\cos\alpha''\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta''}$$

oder

$$z'=c+(x'-a)\frac{\cos\beta'\cos\gamma''-\cos\beta''\cos\gamma'}{\cos\alpha''\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta''}+(y'-b)\frac{\cos\alpha''\cos\gamma'-\cos\alpha'\cos\gamma''}{\cos\alpha''\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta''}$$

d. i. wegen der beiden letzten der Beziehungen (91)

$$z'=c-(x'-a)\frac{\cos\alpha'''}{\cos\gamma'''}-(y'-b)\frac{\cos\beta'''}{\cos\gamma'''} \qquad \ldots.(136)$$

Substituirt man diesen Werth für z' in Gleichung (133), so ergibt sich für die Gleichung der fraglichen Ebene nach der obigen Drehung und Verrückung

$$(\varrho)=x'+y'\sqrt{-1}+\left[c-(x'-a)\frac{\cos\alpha'''}{\cos\gamma'''}-(y'-b)\frac{\cos\beta'''}{\cos\gamma'''}\right]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}.$$

oder wenn man jetzt die Akzente der unabhängig Veränderlichen x' und y' wegläßt,

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+\left[c-(x-a)\frac{\cos\alpha'''}{\cos\gamma'''}-(y-b)\frac{\cos\beta'''}{\cos\gamma'''}\right]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(137)$$

Als sich die vorstehende Ebene noch in der Lage XY befand, bildete die Axe OZ eine Normale auf derselben. Denkt man sich nun, daß eine Linie, welche anfänglich mit der Axe OZ zusammenfällt, an der obigen Drehung der in Rede stehenden Ebene Theil nehme; so wird dieselbe auch nach der Drehung die Richtung einer auf der gedreheten und parallel verrückten Ebene normal stehenden Linie bezeichnen. Da nun die Gleichung der Axe OZ

$$(\varrho)=z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

ist; so hat man zur Bestimmung der Gleichung

$$(\varrho)=x'+y'\sqrt{-1}+z'\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

der fraglichen Normalen nach der Drehung wegen der Beziehungen (86)

$$\left.\begin{aligned} x' &= z\cos\alpha''', \\ y' &= z\cos\beta''', \\ z' &= z\cos\gamma''', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(138)$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} y' &= x'\frac{\cos\beta'''}{\cos\alpha'''}, \\ z' &= x'\frac{\cos\gamma'''}{\cos\alpha'''}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(139)$$

und demnach für die Gleichung der Normalen auf der fraglichen Ebene

$$(\varrho)=x+x\frac{\cos\beta'''}{\cos\alpha'''}\sqrt{-1}+x\frac{\cos\gamma'''}{\cos\alpha'''}\sqrt{+1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(140)$$

folgt.

Bezeichnet man die Neigungswinkel dieſer Normalen gegen die Axen OX, OY, OZ reſp. mit λ, μ, ν, ſodaß die Neigungswinkel der fraglichen Ebene gegen die Koordinatenebenen YZ, ZX, XY reſp. $\frac{\pi}{2}-\lambda$, $\frac{\pi}{2}-\mu$, $\frac{\pi}{2}-\nu$ ſind; ſo hat man in §. 123 geſehen, daß

$$\lambda=\alpha''',\ \mu=\beta''',\ \nu=\gamma''' \quad \ldots.(141)$$

iſt, daß ſich alſo die Gleichung (137) irgend einer Ebene mit Hülfe der Neigungswinkel λ, μ, ν ihrer Normalen gegen die drei Axen OX, OY, OZ in der Form

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+\left[c-(x-a)\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}-(y-b)\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\right]\sqrt{+1}\sqrt{-1} \ldots(142)$$

darſtellen läßt.

Die Gleichung der Durchſchnittslinie der fraglichen Ebene mit der Koordinatenebene XY, welche die Form

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}$$

haben wird, findet man offenbar, wenn man in der Gleichung (137) oder (142) das tertiäre Glied $=0$ ſetzt und durch die hieraus ſich ergebende Beziehung y als Funktion von x ausdrückt. Setzt man alſo in der Gleichung (136) $z'=0$; ſo erhält man bei Weglaſſung der Akzente an den Größen x', y', z' und bei Subſtitution von λ, μ, ν reſp. ſtatt α''', β''', γ'''

$$y=b+c\frac{\cos\nu}{\cos\mu}-(x-a)\frac{\cos\lambda}{\cos\mu}$$

und demnach für die Gleichung der fraglichen Durchſchnittslinie mit der Ebene XY

$$(\varrho)=x+\left[b+c\frac{\cos\nu}{\cos\mu}-(x-a)\frac{\cos\lambda}{\cos\mu}\right]\sqrt{-1} \quad \ldots.(143)$$

Setzt man in Gleichung (136) $y'=0$; ſo kommt

$$z=c+b\frac{\cos\mu}{\cos\nu}-(x-a)\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}$$

und daher für die Gleichung der Durchschnittslinie der in Rede stehenden Ebene mit der Ebene XZ

$$(\varrho)=x+\left[c+b\frac{\cos\mu}{\cos\nu}-(x-a)\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}\right]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(144)$$

Setzt man endlich in Gleichung (136) $x'=0$; so ergibt sich

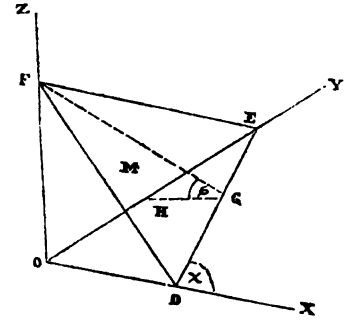
$$z=c+a\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}-(y-b)\frac{\cos\mu}{\cos\nu}$$

und daher für die Gleichung der Durchschnittslinie mit der Ebene YZ

$$(\varrho)=y\sqrt{-1}+\left[c+a\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}-(y-b)\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\right]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(145)$$

§. 126. Wenn man für $\cos\alpha'''$, $\cos\beta'''$, $\cos\gamma'''$ aus den Beziehungen (85) ihre Werthe in φ, ψ, χ substituirt; so erhält man alle Gleichungen des vorstehenden Paragraphes vermittelst der Winkel ausgedrückt, welche die Ebene XY sukzessive um die Axen OX, OY, OZ in den Richtungen YZ, ZX, XY erlitten hat, ehe sie in die Richtung der daselbst betrachteten Ebene gekommen ist.

Setzt man $\psi=0$; so werden sich die früheren Gleichungen offenbar auf eine Ebene DEF beziehen, welche sich unter dem Winkel $FGH=\varphi$ gegen die Ebene XY neigt, deren gemeinschaftliche Durchschnittslinie DE mit der Ebene XY sich unter dem Winkel $EDX=\chi$ gegen die Axe OX neigt, und welche durch einen Punkt M geht, dessen Koordinaten in Beziehung zu den Axen OX, OY, OZ resp. a, b, c sind.



Man erhält für diese Voraussetzung aus den Beziehungen (85)

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha''' &= \sin\varphi\sin\chi,\\ \cos\beta''' &= -\sin\varphi\cos\chi,\\ \cos\gamma''' &= \cos\varphi.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(146)$$

Hierdurch geht die Gleichung (137) der fraglichen Ebene über in

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+[c-(x-a)\operatorname{tang}\varphi\sin\chi+(y-b)\operatorname{tang}\varphi\cos\chi]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(147)$$

Zur Bestimmung der Richtung der Normalen auf dieser Ebene hat man für die Neigungswinkel λ, μ, ν derselben gegen die drei Axen OX, OY, OZ wegen der Gleichungen (141) und (146)

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda &= \sin\varphi\sin\chi,\\ \cos\mu &= -\sin\varphi\cos\chi,\\ \cos\nu &= \cos\varphi,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(148)$$

sodaß die drei Winkel λ, μ, ν sämmtlich spitz oder $<\frac{\pi}{2}$ sind, wenn $\varphi=\mathrm{FGH}$ spitz und $\chi=\mathrm{EDX}$ stumpf ist; auch ist $\nu=\varphi$, was sich im voraus beurtheilen ließ.

Die Gleichung (143) für die Durchschnittslinie der fraglichen Ebene mit der Koordinatenebene XY wird

$$(\varrho)=x+\left[b-\frac{c}{\operatorname{tang}\varphi\cos\chi}+(x-a)\operatorname{tang}\chi\right]\sqrt{-1}, \quad \ldots\ldots(149)$$

die Gleichung (144) für die Durchschnittslinie mit der Ebene XZ wird

$$(\varrho)=x+[c-b\operatorname{tang}\varphi\cos\chi-(x-a)\operatorname{tang}\varphi\sin\chi]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \ldots(150)$$

und die Gleichung (145) für die Durchschnittslinie mit der Ebene YZ wird

$$(\varrho)=y\sqrt{-1}+[c+a\operatorname{tang}\varphi\sin\chi+(y-b)\operatorname{tang}\varphi\cos\chi]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \ldots(151)$$

§. 127. Wenn die Gleichung (137) oder (142) oder (147) in der Form

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+[c+(x-a)f+(y-b)g]\sqrt{+1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(152)$$

gegeben wäre; so findet man durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} f&=-\frac{\cos\alpha'''}{\cos\gamma'''}=-\frac{\cos\lambda}{\cos\nu},\\ g&=-\frac{\cos\beta'''}{\cos\gamma'''}=-\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(153)$$

und durch die Beziehung

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$$

die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda&=\frac{-f}{\sqrt{1+f^2+g^2}},\\ \cos\mu&=\frac{-g}{\sqrt{1+f^2+g^2}},\\ \cos\nu&=\frac{1}{\sqrt{1+f^2+g^2}},\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(154)$$

wodurch die Richtung der Normalen auf jener Ebene gegen die drei Axen OX, OY, OZ bestimmt ist. In diesen Ausdrücken ist die Wurzelgröße positiv zu nehmen, wenn man dadurch die Richtung desjenigen Theiles der Normalen bezeichnen will, welcher mit der Axe OZ einen spitzen Winkel ν bildet. Wegen der Gleichungen (148) oder auch direkt wegen Gleichung (147), in welcher $f=-\operatorname{tang}\varphi\sin\chi$ und $g=\operatorname{tang}\varphi\sin\chi$ sein muß, hat man ferner

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi&=\frac{1}{\sqrt{1+f^2+g^2}}\\ \text{oder } \operatorname{tang}\varphi&=\sqrt{f^2+g^2}\\ \text{und } \operatorname{tang}\chi&=-\frac{f}{g}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(155)$$

§. 128. Gleichung einer Ebene, welche durch zwei sich schneidende gerade Linien geht.

Die Gleichungen zweier gerader Linien, welche sich in Ein

und demſelben Punkte, deſſen Koordinaten reſp. a, b, c ſind, durchſchneiden, ſeien nach Analogie der Gleichung (118) reſp.

$$(\varrho)=x+[b+(x-a)m]\sqrt{-1}+[c+(x-a)n]\sqrt{+1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(156)$$

und

$$(\varrho)=x+[b+(x-a)m_1]\sqrt{-1}+[c+(x-a)n_1]\sqrt{+1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(157)$$

Iſt nun die Gleichung der durch dieſe beiden Geraden und mithin auch durch deren gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkt gehenden Ebene nach Gleichung (152) allgemein

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+[c+(x-a)f+(y-b)g]\sqrt{+1}\sqrt{-1}, \quad \ldots\ldots(158)$$

worin die Größen f und g zu beſtimmen ſind; ſo erkennt man, daß wenn man in der letzteren Gleichung für y den Werth $b+(x-a)m$ aus Gleichung (156) ſubſtituirt, dieſelbe für den Vektor (ϱ) Reſultate liefern muß, welche mit denen aus der Gleichung (156) identiſch ſind. Nimmt man daher dieſe Subſtitution vor und ſetzt alsdann beide Werthe für (ϱ) aus den Gleichungen (156) und (158) einander gleich; ſo ergibt ſich nach gehöriger Reduktion die Beziehung

$$f+gm=n \qquad \ldots\ldots(159)$$

Ebenſo müſſen alle Werthe von (ϱ) aus Gleichung (158) mit denen aus Gleichung (157) identiſch ſein, wenn man in der der erſteren den Werth $y=b+(x-a)m_1$ aus der letzteren ſubſtituirt. Dies ergibt nach gehöriger Entwickelung die zweite Beziehung

$$f+gm_1=n_1 \qquad \ldots\ldots(160)$$

Aus den letzteren beiden Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned} f&=\frac{mn_1-m_1n}{m-m_1},\\ g&=\frac{n-n_1}{m-m_1}, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(161)$$

durch welche Werthe die Gleichung (158) der geſuchten Ebene vollkommen beſtimmt iſt.

§. 129. Gleichung einer Ebene, welche durch drei gegebene Punkte geht.

Die Koordinaten dreier Punkte im Raume seien für den ersten resp. a, b, c, für den zweiten resp. $a+a_1$, $b+b_1$, $c+c_1$, und für den dritten resp. $a+a_2$, $b+b_2$, $c+c_2$, sodaß die Vektoren von dem Nullpunkte bis zu einem jeden dieser drei Punkte resp. durch

$$(r)=a+b\sqrt{-1}+c\sqrt{-1}\sqrt{-1}, \quad \ldots\ldots (162)$$

$$(r_1)=a+a_1+(b+b_1)\sqrt{-1}+(c+c_1)\sqrt{-1}\sqrt{-1}, \quad \ldots\ldots (163)$$

$$(r_2)=a+a_2+(b+b_2)\sqrt{-1}+(c+c_2)\sqrt{-1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (164)$$

dargestellt sind.

Soll nun eine Ebene, welche durch den ersten dieser Punkte geht, und deren Gleichung demnach die allgemeine Form

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+[c+(x-a)f+(y-b)g]\sqrt{-1}\sqrt{-1} \quad \ldots (165)$$

besitzt, auch durch den zweiten Punkt gehen; so muß der Werth von (ϱ), wenn man darin $x=a+a_1$ und $y=b+b_1$ setzt, gleich (r_1) sein. Hierdurch erhält man die Beziehung

$$c+(a+a_1-a)f+(b+b_1-b)g=c+c_1 \quad \text{oder}$$

$$a_1 f+b_1 g=c_1 \quad \ldots\ldots (166)$$

Soll die fragliche Ebene auch durch den dritten Punkt gehen; so muß der Werth von (ϱ) aus Gleichung (165) mit dem von (r_2) aus Gleichung (164) identisch werden, sobald man in jener Gleichung $x=a+a_2$ und $y=b+b_2$ setzt. Dies ergibt die zweite Beziehung

$$a_2 f+b_2 g=c_2, \quad \ldots\ldots (167)$$

und aus den letzteren beiden Beziehungen folgt

$$\left.\begin{aligned} f&=\frac{b_2 c_1-b_1 c_2}{a_1 b_2-a_2 b_1},\\ g&=\frac{a_1 c_2-a_2 c_1}{a_1 b_2-a_2 b_1}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (168)$$

Subſtituirt man dieſe Werthe für f und g in die Gleichung (165); ſo erhält man die verlangte Gleichung der Ebene, welche durch die drei gegebenen Punkte geht.

§. 130. Linien, welche ſich gegen eine Ebene neigen, auf derſelben perpendikular ſtehen oder mit derſelben parallel ſind.

Wenn ſich irgend eine Linie unter dem Winkel ω gegen die Normale einer Ebene oder unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}-\omega$ gegen die Ebene ſelbſt neigen ſoll, und man bezeichnet die Neigungswinkel der fraglichen Geraden gegen die drei Axen OX, OY, OZ reſp. mit λ, μ, ν und die der Normalen auf der Ebene gegen dieſelben Axen reſp. mit λ_1, μ_1, ν_1; ſo muß man nach Gleichung (126)

$$\cos\lambda\cos\lambda_1+\cos\mu\cos\mu_1+\cos\nu\cos\nu_1=\cos\omega \quad \ldots.(169)$$

haben, oder wenn man für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ ihre Werthe aus den Gleichungen (119) und für $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ ihre Werthe aus den Gleichungen (154) einführt,

$$\frac{-f-gm+n}{\sqrt{1+f^2+g^2}\sqrt{1+m^2+n^2}}=\cos\omega \quad \ldots.(170)$$

Soll die fragliche Linie auf der Ebene perpendikular ſtehen, alſo mit den Normalen auf der Ebene parallel ſein; ſo hat man $\omega=0$ oder $\cos\omega=1$, mithin

$$\cos\lambda\cos\lambda_1+\cos\mu\cos\mu_1+\cos\nu\cos\nu_1=1$$

zu ſetzen, woraus durch denſelben Schluß, wie in §. 124, Gleichung (130)

$$\lambda=\lambda_1,\ \mu=\mu_1,\ \nu=\nu_1, \quad \ldots.(171)$$

folgt: wenn man für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ ihre Werthe aus den Gleichungen (119) und für $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ ihre Werthe aus den Gleichungen (154) einführt; ſo erhält man

$$\frac{-f-gm+n}{\sqrt{1+f^2+g^2}\sqrt{1+m^2+n^2}}=1,$$

und hieraus

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\frac{-f}{\sqrt{1+f^2+g^2}}=\cos\lambda_1,$$

$$\frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\frac{-g}{\sqrt{1+f^2+g^2}}=\cos\mu_1,$$

$$\frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+f^2+g^2}}=\cos\nu_1;$$

also

$$\left.\begin{aligned} m&=\frac{g}{f}=\frac{\cos\mu_1}{\cos\lambda_1},\\ n&=-\frac{1}{f}=\frac{\cos\nu_1}{\cos\lambda_1},\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(172)$$

welche Werthe für m und n auch mit der Gleichung (140) für die Normale genau übereinstimmen.

Wenn die fragliche Linie mit der gegebenen Ebene **parallel** sein soll, so hat man $\omega=\frac{\pi}{2}$, $\cos\omega=0$ und daher

$$\cos\lambda\cos\lambda_1+\cos\mu\cos\mu_1+\cos\nu_1\cos\nu=0 \quad \ldots.(173)$$

oder

$$-f-gm+n=0 \quad \ldots.(174)$$

zu setzen. Da sich für diesen Fall zwischen den beiden Größen m und n nur eine einzige Gleichung ergibt; so sieht man, daß die Aufgabe unbestimmt ist, und erst dann bestimmt wird, wenn man entweder den Werth von m oder den von n willkürlich gegeben hat. Die Unbestimmtheit der Gleichung (174) in Beziehung zu den beiden Größen m und n steht im Einverständnisse mit der Natur einer Linie, deren Richtung nur an die Bedingung geknüpft ist, daß sie mit einer gegebenen Ebene parallel sei.

§. 131. Zwei Ebenen, welche sich gegeneinander neigen, aufeinander perpendikular stehen oder einander parallel sind.

Da der Winkel ω, welchen zwei Ebenen miteinander ein-

ſchließen, offenbar gleich dem Winkel iſt, welchen die Normalen auf dieſen Ebenen miteinander bilden; ſo hat man, wenn man die Neigungswinkel der Normalen auf der Einen Ebene gegen die drei Axen OX, OY, OZ reſp. mit λ, μ, ν und die Neigungswinkel der Normalen auf der anderen Ebene gegen dieſelben Axen reſp. mit λ_1, μ_1, ν_1 bezeichnet,

$$\cos\omega = \cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 \quad \ldots\ldots(175)$$

Stellt man die Gleichungen der beiden Ebenen in Form der Gleichung (152) vermittelſt der Koeffizienten f, g, f_1, g_1 dar; ſo hat man wegen der Beziehungen (154)

$$\cos\omega = \frac{1+ff_1+gg_1}{\sqrt{1+f^2+g^2}\sqrt{1+f_1^2+g_1^2}} \quad \ldots\ldots(176)$$

Wenn beide Ebenen aufeinander perpendikular ſtehen ſollen; ſo liefern die beiden vorſtehenden Gleichungen die Beziehungen

$$\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 = 0 \quad \ldots\ldots(177)$$

oder

$$1+ff_1+gg_1 = 0 \quad \ldots\ldots(178)$$

Sollen die beiden Ebenen einander parallel ſein; ſo hat man

$$\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 = 1$$

und hieraus, wie in §. 124 Gleichung (130),

$$\lambda = \lambda_1,\ \mu = \mu_1,\ \nu = \nu_1 \quad \ldots\ldots(179)$$

oder

$$f = f_1,\ g = g_1 \quad \ldots\ldots(180)$$

Gleichung einer krummen Oberfläche, welche durch Umdrehung einer gegebenen Kurve um die Axe OX entſtanden iſt.

§. 131ª. Wenn der Ausdruck für irgend einen Vektor der in der Ebene XY liegenden erzeugenden Kurve oder wenn die Gleichung dieſer Kurve

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(181)$$

ist, worin man

$$y = F(x) \qquad \ldots\ldots(182)$$

hat; so wird man den Ausdruck dieses Vektors für den Fall, daß sich derselbe um den Winkel φ um die Axe OX gedrehet habe, dadurch erhalten, daß man das sekundäre und tertiäre Glied der Gleichung (181) (wovon das letztere hier $=0$ ist) mit dem Faktor $\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{+1}$ multiplizirt (§. 108), oder auch indem man in den Gleichungen (82) $\psi=0$, $\chi=0$ und $z=0$ setzt. Beides ergibt

$$(\varrho) = x + y\cos\varphi\sqrt{-1} + y\sin\varphi\sqrt{+1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(183$$

oder wenn man die neuen Koordinaten des Vektors ϱ mit x', y', z', also die Gleichung der um den Winkel φ gedrehten Kurve durch

$$(\varrho) = x' + y'\sqrt{-1} + z'\sqrt{+1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(184)$$

darstellt,

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y\cos\varphi, \\ z' &= y\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(185)$$

Wenn man zwischen diesen drei Gleichungen die Größe φ eliminirt, ferner für y seinen Werth $F(x)$ oder $F(x')$, da $x=x'$ ist, einführt; so erhält man

$$x' = \pm\sqrt{[F(x')]^2 - y^2},$$

oder wenn man jetzt die Akzente wieder wegläßt und durch x, y, z die Koordinaten irgend eines durch beliebige Drehung der gegebenen Kurve um die Axe OX entstandenen Punktes bezeichnet,

$$z = \pm\sqrt{[F(x)]^2 - y^2} \qquad \ldots\ldots(186)$$

und demnach für den geometrischen Ort aller dieser Punkte oder für die Gleichung der fraglichen Umwälzungsfläche

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} \pm \sqrt{[F(x)]^2 - y^2}\sqrt{+1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(187)$$

So ist z. B. die Kugeloberfläche durch die Umdrehung des Halbkreises, dessen Gleichung für den Mittelpunkt, als Nullpunkt,

$$(\varrho)=x+F(x).\sqrt{-1}=x+\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{-1} \quad \ldots.(188)$$

ist, um die Axe OX entstanden. Substituirt man also den Werth $\sqrt{r^2-x^2}$ für $F(x)$ in Gleichung (187); so erhält man für die Gleichung der Kugeloberfläche

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(189)$$

Diese Gleichung ergibt sich auch aus der Polargleichung der Kugeloberfläche, welche wegen der charakteristischen Eigenschaft dieser Fläche, daß die Länge eines jeden Vektors vom Mittelpunkte aus konstant ist

$$(\varrho)=r(\cos\alpha+\sin\alpha\cos\varphi\sqrt{-1}+\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{\div 1}\sqrt{-1})\ldots(190)$$

sein muß, worin r konstant, α und φ aber willkürlich veränderlich sind. Setzt man hierin, um zu einem Systeme von rechtwinkligen Koordinaten überzugehen,

$$\left.\begin{aligned} r\cos\alpha&=x,\\ r\sin\alpha\cos\varphi&=y,\\ r\sin\alpha\sin\varphi&=z,\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(191)$$

und eliminirt α und φ; so kommt

$$z=\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}, \quad \ldots.(192)$$

also für die Gleichung der Kugeloberfläche

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},$$

ie vorhin.

Wenn die erzeugende Kurve eine gerade Linie

$$(\varrho)=x+F(x)\sqrt{-1}=x+x\tang\alpha.\sqrt{-1} \quad \ldots.(193)$$

ist, welche durch den Nullpunkt geht und sich unter dem Winkel α gegen die Axe OX neigt; so erhält man für die Gleichung der Kegeloberfläche, deren Seitenlinien sich unter dem Winkel α

gegen ihre Axe neigen, welche zugleich die Axe OX ist, während O die Spitze des Kegels bildet,

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}\pm\sqrt{x^2\tang^2\alpha-y^2}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (194)$$

Diese Gleichung ergibt sich auch dadurch, daß man in dem allgemeinen Ausdrucke für irgend einen Vektor der Kegeloberfläche

$$(\varrho)=\varrho(\cos\alpha+\sin\alpha\cos\varphi.\sqrt{-1}+\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}) \ldots (195)$$

die Deklination α eines jeden Vektors gegen die Axe OX als eine konstante, φ und ϱ aber als zwei voneinander unabhängige, willkürlich veränderliche Größen ansieht, und demzufolge zwischen den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\varrho\cos\alpha&=x,\\ \varrho\sin\alpha\cos\varphi&=y,\\ \varrho\sin\alpha\sin\varphi&=z\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (196)$$

die Größen φ und ϱ eliminirt. Dies ergibt

$$z=\pm\sqrt{x^2\tang^2\alpha-y^2}, \quad \ldots\ldots (197)$$

und demnach für die Gleichung der Kegeloberfläche, deren Spitze der Nullpunkt und deren Axe OX ist,

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}\pm\sqrt{x^2\tang^2\alpha-y^2}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},$$

wie vorhin.

Wollte man die Axe der Kegeloberfläche zur tertiären Axe OZ′ und eine in der Spitze O auf dieser Axe errichtete perpendikulare Ebene zur Grundebene X′Y′ annehmen; so hätte man offenbar

$$x'=z,\ y'=y,\ z'=x$$

oder

$$x'=\sqrt{x^2\tang^2\alpha-y^2},\ y'=y,\ z'=x \quad \ldots\ldots (198)$$

zu setzen, was bei einer Elimination von x und y

$$z'=\frac{\pm\sqrt{x'^2+y'^2}}{\tang\alpha}, \quad \ldots\ldots (199)$$

also für die Gleichung der Kegeloberfläche bei den gegenwärtigen Koordinatenrichtungen

$$(\varrho)=x'+y'\sqrt{-1}\pm\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\tang\alpha}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(200)$$

ergibt.

Absolute Länge, Tangente, Normalen und Normalebene einer Kurve im Raume.

§. 132. Länge und Richtung eines Kurvenelementes.

Durch die Gleichung

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}, \quad \ldots.(201)$$

worin

$$y=F_1(x) \quad \text{und} \quad z=F_2(x) \quad \ldots.(202)$$

ist, wird allgemein ein Vektor OM dargestellt, welcher von dem Nullpunkte O nach irgend einem Punkte M einer gegebenen Kurve gezogen ist.

Substituirt man in diese Gleichungen für x den Werth $x+dx$, worin dx ein unendlich kleines Inkrement der unabhängig veränderlichen Größe x bezeichnet; so erhält man den Vektor OM' eines Punktes M' derselben Kurve, welcher dem ersteren Punkte M unendlich benachbart ist, und von demselben um das unendlich kleine, als gerade zu betrachtende Kurvenelement $MM'=ds$ absteht. Wenn man dieses Element MM' ebenfalls seiner Länge und Richtung nach betrachtet; so bildet in dem Dreiecke OM'M die Seite (OM') die arithmetische Summe der beiden anderen Seiten (OM) und (MM') (s. §. 107), und man hat

$$(OM')=(OM)+(MM')=(\varrho)+(ds) \quad \ldots.(203)$$

Da man nun durch Substitution von $x+dx$ für x in die Gleichung (201)

$$\begin{aligned}(OM')&=x+dx+(y+dy)\sqrt{-1}+(z+dz)\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\\&=x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}+dx+dy\sqrt{-1}+dz\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\\&=(\varrho)+dx+dy\sqrt{-1}+dz\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\end{aligned}$$

erhält, so hat man wegen der Gleichung (203)

$$(ds)=dx+dy\sqrt{-1}+dz\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(204)$$

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+[c+(x-a)f+(y-b)g]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(152)$$

gegeben wäre; so findet man durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} f&=-\frac{\cos\alpha'''}{\cos\gamma'''}=-\frac{\cos\lambda}{\cos\nu},\\ g&=-\frac{\cos\beta'''}{\cos\gamma'''}=-\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(153)$$

und durch die Beziehung

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$$

die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda&=\frac{-f}{\sqrt{1+f^2+g^2}},\\ \cos\mu&=\frac{-g}{\sqrt{1+f^2+g^2}},\\ \cos\nu&=\frac{1}{\sqrt{1+f^2+g^2}},\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(154)$$

wodurch die Richtung der Normalen auf jener Ebene gegen die drei Axen OX, OY, OZ bestimmt ist. In diesen Ausdrücken ist die Wurzelgröße positiv zu nehmen, wenn man dadurch die Richtung desjenigen Theiles der Normalen bezeichnen will, welcher mit der Axe OZ einen spitzen Winkel ν bildet. Wegen der Gleichungen (148) oder auch direkt wegen Gleichung (147), in welcher $f=-\operatorname{tang}\varphi\sin\chi$ und $g=\operatorname{tang}\varphi\sin\chi$ sein muß, hat man ferner

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi&=\frac{1}{\sqrt{1+f^2+g^2}}\\ \text{oder } \operatorname{tang}\varphi&=\sqrt{f^2+g^2}\\ \text{und } \operatorname{tang}\chi&=-\frac{f}{g}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(155)$$

§. 128. Gleichung einer Ebene, welche durch zwei sich schneidende gerade Linien geht.

Die Gleichungen zweier gerader Linien, welche sich in Ein

und demſelben Punkte, deſſen Koordinaten reſp. a, b, c ſind, durchſchneiden, ſeien nach Analogie der Gleichung (118) reſp.

$$(\varrho)=x+[b+(x-a)m]\sqrt{-1}+[c+(x-a)n]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(156)$$

und

$$(\varrho)=x+[b+(x-a)m_1]\sqrt{-1}+[c+(x-a)n_1]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots(157)$$

Iſt nun die Gleichung der durch dieſe beiden Geraden und mithin auch durch deren gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkt gehenden Ebene nach Gleichung (152) allgemein

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+[c+(x-a)f+(y-b)g]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}, \quad \ldots\ldots(158)$$

worin die Größen f und g zu beſtimmen ſind; ſo erkennt man, daß wenn man in der letzteren Gleichung für y den Werth $b+(x-a)m$ aus Gleichung (156) ſubſtituirt, dieſelbe für den Vektor (ϱ) Reſultate liefern muß, welche mit denen aus der Gleichung (156) identiſch ſind. Nimmt man daher dieſe Subſtitution vor und ſetzt alsdann beide Werthe für (ϱ) aus den Gleichungen (156) und (158) einander gleich; ſo ergibt ſich nach gehöriger Reduktion die Beziehung

$$f+gm=n \qquad \ldots\ldots(159)$$

Ebenſo müſſen alle Werthe von (ϱ) aus Gleichung (158) mit denen aus Gleichung (157) identiſch ſein, wenn man in der der erſteren den Werth $y=b+(x-a)m_1$ aus der letzteren ſubſtituirt. Dies ergibt nach gehöriger Entwickelung die zweite Beziehung

$$f+gm_1=n_1 \qquad \ldots\ldots(160)$$

Aus den letzteren beiden Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned} f&=\frac{mn_1-m_1n}{m-m_1},\\ g&=\frac{n-n_1}{m-m_1}, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(161)$$

durch welche Werthe die Gleichung (158) der geſuchten Ebene vollkommen beſtimmt iſt.

§. 129. Gleichung einer Ebene, welche durch drei gegebene Punkte geht.

Die Koordinaten dreier Punkte im Raume seien für den ersten resp. a, b, c, für den zweiten resp. $a+a_1$, $b+b_1$, $c+c_1$ und für den dritten resp. $a+a_2$, $b+b_2$, $c+c_2$, sodaß die Vektoren von dem Nullpunkte bis zu einem jeden dieser drei Punkte resp. durch

$$(r)=a+b\sqrt{-1}+c\sqrt{-1}\sqrt{-1}, \quad \ldots.(162)$$

$$(r_1)=a+a_1+(b+b_1)\sqrt{-1}+(c+c_1)\sqrt{-1}\sqrt{-1}, \quad \ldots.(163)$$

$$(r_2)=a+a_2+(b+b_2)\sqrt{-1}+(c+c_2)\sqrt{-1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(164)$$

dargestellt sind.

Soll nun eine Ebene, welche durch den ersten dieser Punkte geht, und deren Gleichung demnach die allgemeine Form

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+[c+(x-a)f+(y-b)g]\sqrt{-1}\sqrt{-1} \ldots(165)$$

besitzt, auch durch den zweiten Punkt gehen; so muß der Werth von (ϱ), wenn man darin $x=a+a_1$ und $y=b+b_1$ setzt, gleich (r_1) sein. Hierdurch erhält man die Beziehung

$$c+(a+a_1-a)f+(b+b_1-b)g=c+c_1 \text{ oder}$$

$$a_1f+b_1g=c_1 \quad \ldots.(166)$$

Soll die fragliche Ebene auch durch den dritten Punkt gehen; so muß der Werth von (ϱ) aus Gleichung (165) mit dem von (r_2) aus Gleichung (164) identisch werden, sobald man in jener Gleichung $x=a+a_2$ und $y=b+b_2$ setzt. Dies ergibt die zweite Beziehung

$$a_2f+b_2g=c_2, \quad \ldots.(167)$$

und aus den letzteren beiden Beziehungen folgt

$$\left.\begin{aligned} f&=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\\ g&=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots.(168)$$

Subſtituirt man dieſe Werthe für f und g in die Gleichung (165); ſo erhält man die verlangte Gleichung der Ebene, welche durch die drei gegebenen Punkte geht.

§. 130. Linien, welche ſich gegen eine Ebene neigen, auf derſelben perpendikular ſtehen oder mit derſelben parallel ſind.

Wenn ſich irgend eine Linie unter dem Winkel ω gegen die Normale einer Ebene oder unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}-\omega$ gegen die Ebene ſelbſt neigen ſoll, und man bezeichnet die Neigungswinkel der fraglichen Geraden gegen die drei Axen OX, OY, OZ reſp. mit λ, μ, ν und die der Normalen auf der Ebene gegen dieſelben Axen reſp. mit λ_1, μ_1, ν_1; ſo muß man nach Gleichung (126)

$$\cos\lambda\cos\lambda_1+\cos\mu\cos\mu_1+\cos\nu\cos\nu_1=\cos\omega \quad \ldots.(169)$$

haben, oder wenn man für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ ihre Werthe aus den Gleichungen (119) und für $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ ihre Werthe aus den Gleichungen (154) einführt,

$$\frac{-f-gm+n}{\sqrt{1+f^2+g^2}\sqrt{1+m^2+n^2}}=\cos\omega \quad \ldots.(170)$$

Soll die fragliche Linie auf der Ebene perpendikular ſtehen, alſo mit den Normalen auf der Ebene parallel ſein; ſo hat man $\omega=0$ oder $\cos\omega=1$, mithin

$$\cos\lambda\cos\lambda_1+\cos\mu\cos\mu_1+\cos\nu\cos\nu_1=1$$

zu ſetzen, woraus durch denſelben Schluß, wie in §. 124, Gleichung (130)

$$\lambda=\lambda_1,\ \mu=\mu_1,\ \nu=\nu_1, \quad \ldots.(171)$$

folgt: wenn man für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ ihre Werthe aus den Gleichungen (119) und für $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ ihre Werthe aus den Gleichungen (154) einführt; ſo erhält man

$$\frac{-f-gm+n}{\sqrt{1+f^2+g^2}\sqrt{1+m^2+n^2}}=1,$$

und hieraus

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\frac{-f}{\sqrt{1+f^2+g^2}}=\cos\lambda_1,$$

$$\frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\frac{-g}{\sqrt{1+f^2+g^2}}=\cos\mu_1,$$

$$\frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+f^2+g^2}}=\cos\nu_1;$$

also

$$\left.\begin{aligned} m&=\frac{g}{f}=\frac{\cos\mu_1}{\cos\lambda_1},\\ n&=-\frac{1}{f}=\frac{\cos\nu_1}{\cos\lambda_1},\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(172)$$

welche Werthe für m und n auch mit der Gleichung (140) für die Normale genau übereinstimmen.

Wenn die fragliche Linie mit der gegebenen Ebene **parallel** sein soll, so hat man $\omega=\frac{\pi}{2}$, $\cos\omega=0$ und daher

$$\cos\lambda\cos\lambda_1+\cos\mu\cos\mu_1+\cos\nu_1\cos\nu=0 \quad \ldots.(173)$$

oder

$$-f-gm+n=0 \quad \ldots.(174)$$

zu setzen. Da sich für diesen Fall zwischen den beiden Größen m und n nur eine einzige Gleichung ergibt; so sieht man, daß die Aufgabe unbestimmt ist, und erst dann bestimmt wird, wenn man entweder den Werth von m oder den von n willkürlich gegeben hat. Die Unbestimmtheit der Gleichung (174) in Beziehung zu den beiden Größen m und n steht im Einverständnisse mit der Natur einer Linie, deren Richtung nur an die Bedingung geknüpft ist, daß sie mit einer gegebenen Ebene parallel sei.

§. 131. Zwei Ebenen, welche sich gegeneinander neigen, aufeinander perpendikular stehen oder einander parallel sind.

Da der Winkel ω, welchen zwei Ebenen miteinander ein-

schließen, offenbar gleich dem Winkel ist, welchen die Normalen auf diesen Ebenen miteinander bilden; so hat man, wenn man die Neigungswinkel der Normalen auf der Einen Ebene gegen die drei Axen OX, OY, OZ resp. mit λ, μ, ν und die Neigungswinkel der Normalen auf der anderen Ebene gegen dieselben Axen resp. mit λ_1, μ_1, ν_1 bezeichnet,

$$\cos\omega = \cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 \quad \ldots\ldots(175)$$

Stellt man die Gleichungen der beiden Ebenen in Form der Gleichung (152) vermittelst der Koeffizienten f, g, f_1, g_1 dar; so hat man wegen der Beziehungen (154)

$$\cos\omega = \frac{1+ff_1+gg_1}{\sqrt{1+f^2+g^2}\sqrt{1+f_1^2+g_1^2}} \quad \ldots\ldots(176)$$

Wenn beide Ebenen aufeinander perpendikular stehen sollen; so liefern die beiden vorstehenden Gleichungen die Beziehungen

$$\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 = 0 \quad \ldots\ldots(177)$$

oder

$$1+ff_1+gg_1 = 0 \quad \ldots\ldots(178)$$

Sollen die beiden Ebenen einander parallel sein; so hat man

$$\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 = 1$$

und hieraus, wie in §. 124 Gleichung (130),

$$\lambda=\lambda_1,\ \mu=\mu_1,\ \nu=\nu_1 \quad \ldots\ldots(179)$$

oder

$$f=f_1,\ g=g_1 \quad \ldots\ldots(180)$$

Gleichung einer krummen Oberfläche, welche durch Umdrehung einer gegebenen Kurve um die Axe OX entstanden ist.

§. 131ª. Wenn der Ausdruck für irgend einen Vektor der in der Ebene XY liegenden erzeugenden Kurve oder wenn die Gleichung dieser Kurve

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (181)$$

ist, worin man

$$y = F(x) \qquad \ldots\ldots (182)$$

hat; so wird man den Ausdruck dieses Vektors für den Fall, daß sich derselbe um den Winkel φ um die Axe OX gedrehet habe, dadurch erhalten, daß man das sekundäre und tertiäre Glied der Gleichung (181) (wovon das letztere hier $=0$ ist) mit dem Faktor $\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{\div 1}$ multiplizirt (§. 108), oder auch indem man in den Gleichungen (82) $\psi = 0$, $\chi = 0$ und $z = 0$ setzt. Beides ergibt

$$(\varrho) = x + y\cos\varphi\sqrt{-1} + y\sin\varphi\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (183$$

oder wenn man die neuen Koordinaten des Vektors ϱ mit x', y', z', also die Gleichung der um den Winkel φ gedreheten Kurve durch

$$(\varrho) = x' + y'\sqrt{-1} + z'\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (184)$$

darstellt,

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y\cos\varphi, \\ z' &= y\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (185)$$

Wenn man zwischen diesen drei Gleichungen die Größe φ eliminirt, ferner für y seinen Werth $F(x)$ oder $F(x')$, da $x = x'$ ist, einführt; so erhält man

$$z' = \pm\sqrt{[F(x')]^2 - y^2},$$

oder wenn man jetzt die Akzente wieder wegläßt und durch x, y, z die Koordinaten irgend eines durch beliebige Drehung der gegebenen Kurve um die Axe OX entstandenen Punktes bezeichnet,

$$z = \pm\sqrt{[F(x)]^2 - y^2} \qquad \ldots\ldots (186)$$

und demnach für den geometrischen Ort aller dieser Punkte oder für die Gleichung der fraglichen Umwälzungsfläche

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} \pm \sqrt{[F(x)]^2 - y^2}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (187)$$

So ist z. B. die Kugeloberfläche durch die Umdrehung des Halbkreises, dessen Gleichung für den Mittelpunkt, als Nullpunkt,

$$(\varrho)=x+\mathrm{F}(x).\sqrt{-1}=x+\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(188)$$

ist, um die Axe OX entstanden. Substituirt man also den Werth $\sqrt{r^2-x^2}$ für $\mathrm{F}(x)$ in Gleichung (187); so erhält man für die Gleichung der Kugeloberfläche

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(189)$$

Diese Gleichung ergibt sich auch aus der Polargleichung der Kugeloberfläche, welche wegen der charakteristischen Eigenschaft dieser Fläche, daß die Länge eines jeden Vektors vom Mittelpunkte aus konstant ist

$$(\varrho)=r(\cos\alpha+\sin\alpha\cos\varphi\sqrt{-1}+\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{\div 1}\sqrt{-1})\ldots(190)$$

sein muß, worin r konstant, α und φ aber willkürlich veränderlich sind. Setzt man hierin, um zu einem Systeme von rechtwinkligen Koordinaten überzugehen,

$$\left.\begin{aligned} r\cos\alpha&=x,\\ r\sin\alpha\cos\varphi&=y,\\ r\sin\alpha\sin\varphi&=z,\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(191)$$

und eliminirt α und φ; so kommt

$$z=\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}, \qquad \ldots\ldots(192)$$

also für die Gleichung der Kugeloberfläche

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},$$

ie vorhin.

Wenn die erzeugende Kurve eine gerade Linie

$$(\varrho)=x+\mathrm{F}(x)\sqrt{-1}=x+x\,\mathrm{tang}\,\alpha.\sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots(193)$$

ist, welche durch den Nullpunkt geht und sich unter dem Winkel α gegen die Axe OX neigt; so erhält man für die Gleichung der Kegeloberfläche, deren Seitenlinien sich unter dem Winkel α

gegen ihre Axe neigen, welche zugleich die Axe OX ist, während O die Spitze des Kegels bildet,

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}\pm\sqrt{x^2\tang^2\alpha-y^2}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(194)$$

Diese Gleichung ergibt sich auch dadurch, daß man in dem allgemeinen Ausdrucke für irgend einen Vektor der Kegeloberfläche

$$(\varrho)=\varrho(\cos\alpha+\sin\alpha\cos\varphi.\sqrt{-1}+\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{\div 1}\sqrt{-1})\ldots(195)$$

die Deklination α eines jeden Vektors gegen die Axe OX als eine konstante, φ und ϱ aber als zwei voneinander unabhängige, willkürlich veränderliche Größen ansieht, und demzufolge zwischen den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\varrho\cos\alpha&=x,\\ \varrho\sin\alpha\cos\varphi&=y,\\ \varrho\sin\alpha\sin\varphi&=z\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(196)$$

die Größen φ und ϱ eliminirt. Dies ergibt

$$z=\pm\sqrt{x^2\tang^2\alpha-y^2}, \quad \ldots\ldots(197)$$

und demnach für die Gleichung der Kegeloberfläche, deren Spitze der Nullpunkt und deren Axe OX ist,

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}\pm\sqrt{x^2\tang^2\alpha-y^2}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},$$

wie vorhin.

Wollte man die Axe der Kegeloberfläche zur tertiären Axe OZ′ und eine in der Spitze O auf dieser Axe errichtete perpendikulare Ebene zur Grundebene X′Y′ annehmen; so hätte man offenbar

$$x'=z,\ y'=y,\ z'=x$$

oder

$$x'=\sqrt{x^2\tang^2\alpha-y^2},\ y'=y,\ z'=x \quad \ldots\ldots(198)$$

zu setzen, was bei einer Elimination von x und y

$$z'=\frac{\pm\sqrt{x'^2+y'^2}}{\tang\alpha}, \quad \ldots\ldots(199)$$

also für die Gleichung der Kegeloberfläche bei den gegenwärtigen Koordinatenrichtungen

$$(\varrho)=x'+y'\sqrt{-1}\pm\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\operatorname{tang}\alpha}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots.(200)$$

ergibt.

Absolute Länge, Tangente, Normalen und Normalebene einer Kurve im Raume.

§. 132. Länge und Richtung eines Kurvenelementes.

Durch die Gleichung

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}, \qquad \ldots.(201)$$

worin

$$y=F_1(x) \quad \text{und} \quad z=F_2(x) \qquad \ldots.(202)$$

ist, wird allgemein ein Vektor OM dargestellt, welcher von dem Nullpunkte O nach irgend einem Punkte M einer gegebenen Kurve gezogen ist.

Substituirt man in diese Gleichungen für x den Werth $x+dx$, worin dx ein unendlich kleines Inkrement der unabhängig veränderlichen Größe x bezeichnet; so erhält man den Vektor OM' eines Punktes M' derselben Kurve, welcher dem ersteren Punkte M unendlich benachbart ist, und von demselben um das unendlich kleine, als gerade zu betrachtende Kurvenelement $MM'=ds$ absteht. Wenn man dieses Element MM' ebenfalls seiner Länge und Richtung nach betrachtet; so bildet in dem Dreiecke OM'M die Seite (OM') die arithmetische Summe der beiden anderen Seiten (OM) und (MM') (s. §. 107), und man hat

$$(OM')=(OM)+(MM')=(\varrho)+(ds) \qquad \ldots.(203)$$

Da man nun durch Substitution von $x+dx$ für x in die Gleichung (201)

$$\begin{aligned}(OM')&=x+dx+(y+dy)\sqrt{-1}+(z+dz)\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\\&=x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}+dx+dy\sqrt{-1}+dz\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\\&=(\varrho)+dx+dy\sqrt{-1}+dz\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\end{aligned}$$

erhält, so hat man wegen der Gleichung (203)

$$(ds)=dx+dy\sqrt{-1}+dz\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots.(204)$$

Bezeichnet man nun die Neigungswinkel des Kurvenelementes ds gegen die drei Axen OX, OY, OZ resp. mit α, β, γ und die Inklinationswinkel desselben gegen die Ebene XY, d. h. den Winkel, welchen eine durch die Richtung von ds und die Axe OX gelegte Ebene mit der Ebene XY bildet, mit φ; so hat man nach den Formeln des §s. 110

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, \quad \ldots.(205)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},\\
\cos\beta &= \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},\\
\cos\gamma &= \frac{dz}{ds} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},
\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(206)$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dz}{dy} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dy}{dx}} \quad \ldots.(207)$$

§. 133. Länge eines endlichen Kurvenbogens zwischen zwei gegebenen Abszissen x_1 und x_2

Wenn man die Länge eines Kurvenbogens, welcher zwischen den Werthen $x=x_1$ und $x=x_2$ liegt, also die Summe der zwischen diesen Werthen liegenden, allgemein durch Gleichung (205) ausgedrückten Kurvenelementen mit s bezeichnet; so folgt aus bekannten Gründen der Analysis für die Summe aller Werthe, welche man für ds Gleichung (205) erhält, wenn man darin die Größe x von x_1 und x_2 variiren läßt,

$$s=\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad \ldots.(208)$$

§. 134. Tangente an einer Kurve in irgend einem gegebenen Punkte.

Da die Richtung des Elementes einer Kurve in irgend einem Punkte zugleich die Richtung der Tangente in diesem Punkte angibt; so erhellet, daß die Richtung der Letzteren allgemein durch die Gleichungen (206) und (207) dargestellt ist.

Wenn also die Koordinaten eines gegebenen Punktes der Kurve, an welchen die Tangente gelegt werden soll, resp. x_1, y_1, z_1 sind; so erhält man die Gleichung derselben, wenn man in den Formeln (206) resp. x_1, y_1, z_1 für x, y, z setzt, die erhaltenen Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ resp. für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ in Gleichung (116) substituirt, und außerdem in dieser Gleichung $a=x_1$, $b=y_1$, $c=z_1$ setzt. Dies ergibt

$$(\varrho)=x+\left[y_1+(x-x_1)\frac{dy_1}{dx_1}\right]\sqrt{-1}+\left[z_1+(x-x_1)\frac{dz_1}{dx_1}\right]\sqrt{+1}\sqrt{-1}\ldots(209)$$

Setzt man in der Gleichung (201) das tertiäre Glied oder $z=0$; so stellt die Gleichung

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}$$

die Projektion der gegebenen Kurve auf die Ebene XY dar. Setzt man ebenso in Gleichung (209) das tertiäre Glied gleich null; so stellt

$$(\varrho)=x+\left[y_1+(x-x_1)\frac{dy_1}{dx_1}\right]\sqrt{-1}$$

die Projektion der Tangente an jener Kurve auf dieselbe Ebene XY dar.

Eine Vergleichung der letzten beiden Gleichungen mit denen des §s 100, durch welche die Lage der Tangente an eine ebene Kurve bestimmt sind, zeigt nun unmittelbar, daß die Projektion der Tangente an einer Kurve im Raume auf die Ebene XY auch eine Tangente an der Projektion dieser Kurve auf dieselbe Ebene

ist. Da man nun durch Veränderung der Koordinaten die Ebene XY in jede beliebige Lage bringen kann, und der vorstehende Satz stets Gültigkeit behalten wird; so folgt, daß allgemein die Projektion der Tangente auf irgend eine Ebene auch die Projektion der Kurve auf diese Ebene in der Projektion des Berührungspunktes berühren wird.

§. 135. Normalen und Normalebene auf einer Kurve im Raume.

Irgend eine gerade Linie, welche auf der Richtung des Kurvenelementes oder der Tangente an diesem Elemente perpendikular steht, bildet eine Normale auf der Kurve, und eine auf der Tangente perpendikular stehende Ebene bildet die Normalebene.

Man erkennt, daß es für jeden Punkt einer Kurve zwar nur eine einzige Tangente, aber unendlich viele Normalen gibt, welche Letzteren sämmtlich in der Normalebene liegen. Wenn man die Neigungswinkel irgend einer Normalen in demjenigen Punkte der Kurve, dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1 sind, gegen die drei Axen OX, OY, OZ resp. mit λ, μ, ν und die der Tangente in demselben Punkte der Kurve, wie vorhin, resp. mit α, β, γ bezeichnet; so hat man wegen Gleichung (128) und wegen der Gleichungen (206)

$$\cos\lambda + \frac{dy_1}{dx_1}\cos\mu + \frac{dz_1}{dx_1}\cos\nu = 0$$

oder auch

$$1 + \frac{dy_1}{dx_1}\frac{\cos\mu}{\cos\lambda} + \frac{dz_1}{dx_1}\frac{\cos\nu}{\cos\lambda} = 0, \qquad \ldots\ldots (210)$$

oder wenn man die Koeffizienten $\frac{\cos\mu}{\cos\lambda}$ und $\frac{\cos\nu}{\cos\lambda}$ der allgemeinen Gleichung (116) einer geraden Linie resp. mit m und n bezeichnet,

$$1 + m\frac{dy_1}{dx_1} + n\frac{dz_1}{dx_1} = 0 \qquad \ldots\ldots (211)$$

Aus dieser Gleichung kann die Eine der beiden Größen m und n bestimmt werden, nachdem die andere gegeben sein wird. Wenn Dies geschehen ist; so stellt

$$(\varrho)=x+[y_1+(x-x_1)m]\sqrt{-1}+[z+(x-x_1)n]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\ldots(212)$$

die Gleichung der fraglichen Normalen dar.

Um die Gleichung für die Normalebene in demselben Punkte der Kurve herzustellen, braucht man nur zu beachten, daß die obigen Winkel α, β, γ zugleich die Neigungswinkel der Normalen auf dieser Normalebene gegen die drei Axen OX, OY, OZ bezeichnen. Demnach hat man wegen Gleichung (142) für die Gleichung der fraglichen Normalebene in einem Punkte der Kurve, dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1 sind,

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+\left[z_1-\frac{(x-x_1)}{\frac{dz_1}{dx_1}}-(y-y_1)\frac{\frac{dy_1}{dx_1}}{\frac{dz_1}{dx_1}}\right]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\ldots.(213)$$

oder auch, wenn man aus den Gleichungen (182) x und y als Funktionen von z entwickelt und die Differenzialkoeffizienten $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$ nimmt,

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+\left[z_1-(x-x_1)\frac{dx_1}{dz_1}-(y-y_1)\frac{dy_1}{dz_1}\right]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\ldots(214)$$

Berührungsebene, Tangenten, Normale und Normalebenen einer krummen Fläche.

§. 136. Berührungsebene und Tangenten an einer krummen Fläche.

Irgend ein Element einer krummen Fläche, dessen Dimensionen nach allen Richtungen hin unendlich klein sind, kann offenbar als ein unendlich kleiner Theil einer Ebene angesehen werden, welche die Berührungsebene der gegebenen Fläche an der Stelle des fraglichen Elementes bildet. Irgend eine in dieser Ebene liegende und durch den Berührungspunkt gehende Gerade ist alsdann eine Tangente an der krummen Fläche.

Setzt man nun in der allgemeinen Gleichung

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(215)$$

für irgend eine Fläche, in welcher x und y unabhängig veränderlich sind und z eine Funktion von beiden, also

$$z = F(x, y) \qquad \ldots . (216)$$

ist, Ein Mal $x = x_1$ und $y = y_1$, wodurch $z = F(x_1, y_1) = z_1$ wird, alsdann $x = x_1 + dx_1$ und $y = y_1$, wodurch z in $F(x_1 + dx, y_1) = F(x_1, y_1) + \frac{dF(x_1, y_1)}{dx_1} dx_1 = z_1 + \frac{dz_1}{dx_1} dx_1$ übergeht, alsdann $x = x_1$ und $y = y_1 + dy_1$, wodurch z in $F(x_1, y_1 + dy_1) = F(x_1, y_1) + \frac{dF(x_1, y_1)}{dy_1} dy_1 = z_1 + \frac{dz_1}{dy_1} dy_1$ übergeht, und endlich $x = x_1 + dx_1$ und $y = y_1 + dy_1$, wodurch z in $F(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1) = F(x_1, y_1) + \frac{dF(x_1, y_1)}{dx_1} dx_1 + \frac{dF(x_1, y_1)}{dy_1} dy_1 = z_1 + \frac{dz_1}{dx_1} dx_1 + \frac{dz_1}{dy_1} dy_1$ übergeht, sodaß in diesen Ausdrücken resp. $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dy}$ die partiellen Differentialkoeffizienten der Funktion F in Beziehung zu den unabhängig veränderlichen Größen x und y bezeichnen; so erhält man die Werthe der Vektoren von vier Punkten der gegebenen Fläche, deren Projektionen auf die Ebene XY ein Rechteck von den unendlich kleinen Seiten dx_1 und dy_1 bilden werden.

Diese vier Punkte selbst werden im Raume allgemein die Eckpunkte eines Parallelogrammes sein, welches das Element der krummen Fläche und zu gleicher Zeit das Element der Berührungsfläche in demjenigen Punkte darstellt, dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1 sind.

Um nun die Gleichung der Ebene zu bestimmen, welche durch folgende drei Punkte der krummen Fläche geht, 1) durch den, dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1 sind, 2) durch den, dessen Koordinaten $x_1 + dx_1, y_1, z_1 + \frac{dz_1}{dx_1} dx_1$ sind, 3) durch den, dessen Koordinaten $x_1, y_1 + dy_1, z_1 + \frac{dz_1}{dy_1} dy_1$ sind, braucht man in den Formeln des §s. 129 nur

$$a=x_1,\ b=y_1,\ c=z_1,$$

$$a_1=dx_1,\ b_1=0,\ c_1=\frac{dz_1}{dx_1}dx_1,$$

$$a_2=0,\ b_2=dy_1,\ c_2=\frac{dz_1}{dy_1}dy_1$$

zu ſetzen. Dies ergibt für die Werthe von f und g aus den Gleichungen (168)

$$\left.\begin{aligned} f&=\frac{dz_1}{dx_1},\\ g&=\frac{dz_1}{dy_1},\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(217)$$

und demnach für die Gleichung der fraglichen Berührungsebene

$$(\rho)=x+y\sqrt{-1}+\left[z_1+(x-x_1)\frac{dz_1}{dx_1}+(y-y_1)\frac{dz_1}{dy_1}\right]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(218)$$

Wenn man in dieſer Gleichung $x=x_1+dx_1$ und $y=y_1+dy_1$ ſetzt; ſo wird dieſelbe

$$(\rho)=x_1+dx_1+(y+dy_1)\sqrt{-1}+\left(z_1+\frac{dz_1}{dx_1}dx_1+\frac{dz_1}{dy_1}dy_1\right)\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},$$

und man ſieht, daß in dieſer Ebene auch der vierte der obigen Punkte liegt, deſſen Koordinaten

$$x_1+dx_1,\ y+dy_1,\ z_1+\frac{dz_1}{dx_1}dx_1+\frac{dz_1}{dy_1}dy_1 \text{ waren.}$$

Wenn φ den Neigungswinkel der Berührungsebene gegen die Ebene XY und χ den Winkel bezeichnet, unter welchem ſich die Durchſchnittslinie jener Ebene mit der Ebene XY gegen die Axe OX neigt; ſo hat man wegen der Gleichungen (155)

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dy_1}\right)^2}} \\ \text{oder} \\ \operatorname{tang}\varphi &= \sqrt{\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dy_1}\right)^2} \\ \text{und} \\ \operatorname{tang}\chi &= -\frac{\frac{dz_1}{dx_1}}{\frac{dz_1}{dy_1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots.(219)$$

Die Lage irgend einer Tangente an der krummen Fläche in dem Punkte, deſſen Koordinaten x_1, y_1, z_1 ſind, iſt durch die Bedingungen beſtimmt, daß ſie durch den letzteren Punkt gehe und in der Berührungsebene liege, oder dieſer Ebene parallel ſei. Der erſteren Bedingung wird ein Genüge geleiſtet, wenn die Gleichung der erwähnten Linie die Form

$$(\varrho)=x+[y_1+(x-x_1)m]\sqrt{-1}+[z_1+(x-x_1)n]\sqrt{+1}\sqrt{-1} \ldots(220)$$

hat (ſ. Gleichung 118), worin die Koeffizienten m und n noch ganz unbeſtimmt ſind. Die zweite Bedingung liefert nach der Gleichung (174) zwiſchen den beiden Größen m und n die Beziehung

$$-\frac{dz_1}{dx_1}-m\frac{dz_1}{dy_1}+n=0 \qquad \ldots.(221)$$

Nachdem die Eine der beiden Größen m und n gegeben iſt, wird man die andern vermittelſt dieſer Beziehung beſtimmen und in Gleichung (220) ſubſtituiren können.

§. 137. Normale und Normalebenen auf einer krummen Fläche.

Die Gleichung der Normalen auf der krummen Fläche oder auf deren Berührungsebene in dem Berührungspunkte, deſſen Koordinaten x_1, y_1, z_1 ſind, wird die allgemeine Form

$$(\varrho)=x+[y_1+(x-x_1)m]\sqrt{-1}+[z_1+(x-x_1)n]\sqrt{+1}\sqrt{-1}$$

haben. Die Koeffizienten m und n sind wegen der Gleichungen (172) und der Werthe von f und g aus den Gleichungen (217)

$$\left.\begin{aligned} m&=-\frac{\frac{dz_1}{dy_1}}{\frac{dz_1}{dx_1}},\\ n&=-\frac{1}{\frac{dz_1}{dx_1}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (222)$$

Hiernach wird die Gleichung der gesuchten Normalen

$$(\varrho)=x+\left[y_1+(x-x_1)\frac{\frac{dz_1}{dy_1}}{\frac{dz_1}{dx_1}}\right]\sqrt{-1}+\left[z_1-\frac{(x-x_1)}{\frac{dz_1}{dx_1}}\right]\sqrt{+1}\sqrt{-1}\ldots(223)$$

Wenn man die Neigungswinkel der Normalen gegen die Aren OX, OY, OZ resp. mit λ, μ, ν bezeichnet; so hat man wegen der Gleichungen (119), wenn man daselbst die Wurzelgröße negativ nimmt,

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda&=\frac{-\frac{dz_1}{dx_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dy_1}\right)^2}},\\ \cos\mu&=\frac{-\frac{dz_1}{dy_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dy_1}\right)^2}},\\ \cos\nu&=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dy_1}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (224)$$

In diesen Gleichungen ist die Wurzelgröße positiv zu nehmen, wenn dieselben die Richtung desjenigen Theiles der Nor-

malen bezeichnen sollen, welcher mit der Axe OZ einen spitzen Winkel v einschließt.

Irgend eine durch die Normale gelegte oder auf der Berührungsebene im Berührungspunkte perpendikular stehende Ebene bildet eine Normalebene auf der krummen Fläche. Ihre Gleichung wird die allgemeine Form

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+[z_1+(x-x_1)f_1+(y-y_1)g_1]\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\ldots(225)$$

haben (s. Gleichung 152), worin die Koeffizienten f_1 und g_1 noch näher zu bestimmen sind. Die Bedingung, daß die fragliche Ebene auf der Berührungsebene perpendikular stehen solle, liefert wegen Gleichung (178) und wegen der Werthe von f und g aus den Gleichungen (217) die Beziehung

$$1+f_1\frac{dz_1}{dx_1}+g_1\frac{dz_1}{dy_1}=0, \qquad \ldots.(226)$$

woraus die Eine der beiden Größen f_1 und g_1 gefunden werden kann, nachdem die andere gegeben ist.

Fünfter Abschnitt.

Arithmetische Darstellung der Flächengrößen nach ihrer Quantität und Lage im Raume.

§. 138. Quantität einer Fläche und Flächeneinheit.

Von den räumlichen Größen, welchen das Merkmal der Quantität und der Richtung zukommt, haben wir in den früheren Abschnitten nur die Linien, als diejenigen Größen betrachtet, an denen jene Eigenschaften in der einfachsten Weise ausgeprägt sind.

Eine andere Klasse räumlicher Größen, die unter sich in ähnlichen Beziehungen stehen, wie die Linien, sind die Flächen, sobald dieselben nach ihrer Flächenausdehnung und nach ihren gegenseitigen Lagen im Raume in Betracht gezogen werden.

Die **Quantität** einer Fläche ist die absolute Größe ihrer Ausdehnung nach zwei Dimensionen des Raumes, sobald man sich dieselbe in einer Ebene ausgebreitet denkt. Der Begriff von der Größe oder Ausdehnung einer Oberfläche ist ein aus der Sinnenwelt in gleicher Weise abstrahirter ursprünglicher Begriff, wie der von der Größe oder Länge einer Linie. Man erkennt leicht, daß beide Arten von Größen, die Linie und die Fläche, vollkommen ungleichartig sind, und daß man durch Verfolgung der Untersuchungen der früheren Abschnitte über Linien, niemals auf den Begriff der Größe einer Flächenausdehnung würde kommen können. Um über die letztere Art von Größen Betrachtungen anstellen zu können, ist es demnach nothwendig, zuvörderst den Grundcharakter ihrer Quantität festzustellen, um daraus eine Einheit abzuleiten, auf welche sich alle übrigen gleichartigen Größen beziehen und durch welche sich dieselben messen lassen. Dieser Grundcharakter der Flächengrößen spricht sich nun aus

in der schon erwähnten gleichzeitigen Ausdehnung nach zwei Dimensionen des Raumes, oder nach den beiden Dimensionen Ein und derselben Ebene.

Ehe wir im Stande sein werden, die Beziehungen arithmetisch zu entwickeln, in welchen verschiedene Flächen ihrer Quantität nach zueinander stehen, müssen wir eine deutliche Vorstellung von der Entstehung und Fortbildung der Flächenräume haben, weil die verschiedenen Operationen der Arithmetik nur eine kombinirte Anwendung dieser Bildungsprinzipien zum Zwecke haben.

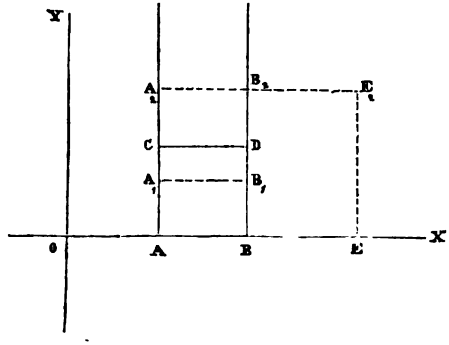
Wir schließen hierbei, wie bei den Linien, daß eine Fläche, als abgeschlossenes Ganze, zuvörderst eine Gränze haben müsse, und daß eine Fort- oder Rückbildung derselben in der unendlichen Reihe aller gleichartigen Größen nur durch eine stetige Bewegung jener Gränze erzeugt werden könne. Bei den Linien war die Gränze der einfache, ausdehnungslose Punkt: da derselbe keine Form besaß, und da der Charakter der Quantität einer Länge in der Erstreckung nach einer einzigen Dimension des Raumes bestand, jener Punkt sich also bei der Größenbildung nur in derselben geraden Linie fortbewegen konnte; so mußte die Quantität oder Länge einer Linie offenbar von der Form ihrer Gränze unabhängig sein, indem dieselbe für alle Linien eine gleiche ausdehnungslose Größe war, und außerdem mußte die Form aller jener Größen von den verschiedensten Quantitäten dieselbe einfache Gestalt annehmen. Bei den Flächen (welche, wenn es nicht ausdrücklich bemerkt ist, stets als eben angesehen werden) ist Dies nicht der Fall. Ihre Gränze ist die (gerade oder krumme) Linie. Da dieselbe selbst Ausdehnung und Form besitzt; so würde sie während ihrer Bewegung oder während der Veränderung ihrer Lage auch jene Eigenschaft, nämlich ihre Form, ändern können, und Flächen erzeugen, welche bei gleicher Quantität verschieden gestaltete Gränzen besitzen. Hieraus folgt, daß die Größe einer Fläche von ihrer äußeren Form abhängig sein wird. Wenn es nun behuf Bestimmung der Länge einer Linie nur erforderlich war, einfach die Größe anzugeben, um welche sich ihre Gränze, der Punkt, in einer gewissen Richtung bewegt hatte; so wird es jetzt behuf Bestimmung der Ausdehnung einer Fläche neben jener Angabe noch erforderlich sein, das Gesetz aus-

zudrücken, nach welchem jene Gränze während ihrer Bewegung in einer gewissen Richtung ihrer Form geändert hat.

Durch die stetige Bewegung einer geraden Linie parallel mit sich selbst und in einer auf ihr perpendikular stehenden Richtung wird man nun alle möglichen absoluten Flächenquantitäten von dem Werthe 0 bis ∞ erzeugen können; bei gleichzeitiger Variation der Form jener Linie nach beliebigen Gesetzen wird man alsdann auch alle Flächenräume von denselben Quantitäten und von den verschiedenartigsten Formen darstellen können.

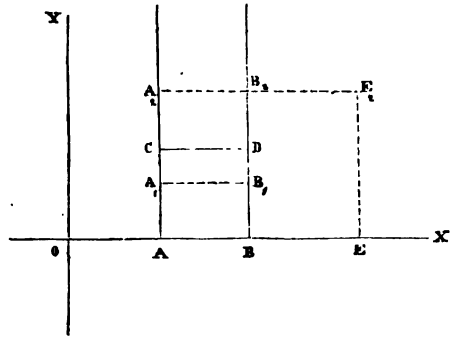
Jene erzeugende Linie bildet im ersten Augenblicke ihrer Bewegung den Nullpunkt aller Flächengrößen. Es leuchtet ein, daß die absolute Länge dieser Linie, durch deren Bewegung aus einer ursprünglichen Lage man alle Quantitäten von Flächen von dem Werthe 0 bis ∞ erzeugen will, zwar beliebig groß oder klein, aber durchaus nicht $=0$ angenommen werden kann, weil sich dieselbe sonst auf einen Punkt reduziren würde, durch dessen Bewegung keine Fläche beschrieben werden kann, daß also nur die Linie und nicht der Punkt als Nullpunkt aller Flächenquantität angesehen werden kann.

Ist nun YOX irgend eine unbegränzte Ebene im Raume, OX irgend eine gerade Axe und OY die auf OX perpendikular stehende Axe; so sei AB gleich der Längeneinheit λ. Denkt man sich diese Längeneinheit AB in eine solche Bewegung gesetzt, daß



sie fortwährend der Axe OX parallel bleibt, und daß sich ein jeder ihrer Punkte parallel zur Axe OY in der Richtung OY bewegt; so wird dieselbe sukzessive in die Lagen AB, A_1B_1, CD

A_2B_2 etc. kommen und dabei ein stetiges System von Flächenquantitäten beschreiben, von welchem die Flächen $AB=0$, ABB_1A_1, $ABDC$, ABB_2A_2 etc. einzelne Glieder sind. Diejenige Fläche, $ABDC$, welche man erhält, nachdem ein jeder Punkt der Längen-



einheit AB einen Raum $AC=BD=$ der Längeneinheit AB selbst durchlaufen hat, also die Fläche des über der Längeneinheit beschriebenen Quadrates, bildet alsdann die Flächeneinheit, durch welche die Quantitäten aller übrigen Flächen ebenso gemessen werden, wie die Längen durch die Längeneinheit und die absoluten Zahlen durch die Zahleneinheit 1. Bezeichnen wir diese Flächeneinheit durch Φ.

§. 139 Bestimmung des Flächeninhaltes eines Rechteckes aus seinen beiden Seiten.

Denkt man sich sowol die Seite $AB=\lambda$, wie die Seite $AC=\lambda$ des die Flächeneinheit Φ darstellenden Quadrates $ABDC$ in n gleiche Theile getheilt, von denen also ein jeder die Länge $\frac{\lambda}{n}$ besitzen wird, und durch die auf AB entstehenden Theilpunkte mit der Axe OY und durch die auf AC entstehende Theilpunkte mit der Axe OX Parallelen gezogen; so wird dadurch das Quadrat $ABDC$ offenbar in n^2 einander gleiche kleinere Quadrate zerlegt, von denen ein jedes den Flächeninhalt $\frac{\Phi}{n^2}$ besitzt.

Ist nun AEE_2A_2 ein Rechteck, dessen Seite AE p solcher

Theile, von denen jeder $= \frac{\lambda}{n}$ ist, und dessen Seite AA_2 $q$dergleichen Theile enthält, sodaß die Länge von $AE = p\,\frac{\lambda}{n}$ und die von $AA_2 = q\frac{\lambda}{n}$ ist; so leuchtet ein, wenn man sich durch die Theilpunkte auf AE und AA_2 resp. mit OY und OX Parallelen gezogen denkt, daß das Rechteck AEE_2A_2 eine Anzahl $= pq$ solcher kleineren Quadrate enthalten wird, von denen ein jedes $= \frac{\Phi}{n^2}$ ist. Die Fläche V des gedachten Rechteckes ist demnach

$$V = pq\,\frac{\Phi}{n^2} = \frac{p}{n}\frac{q}{n}\,\Phi \qquad \ldots.(1)$$

d. h. dieses Rechteck enthält $\frac{pq}{n^2}$ Flächeneinheiten.

Bezeichnet man nun die Längen der Seiten AE und AA_2 resp. mit a und b und die absoluten Zahlen, welche deren Verhältniß zur Längeneinheit λ angeben, mit α und β, sodaß

$$a = \alpha\lambda \quad \text{und} \quad b = \beta\lambda$$

oder

$$\frac{a}{\lambda} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{b}{\lambda} = \beta$$

ist; so leuchtet ein, weil nach dem Obigen die Länge a auch $= p\,.\,\frac{\lambda}{n}$ und die Länge $b = q\,.\,\frac{\lambda}{n}$ sein soll, woraus

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{p}{n} \quad \text{und} \quad \frac{b}{\lambda} = \frac{q}{n}$$

folgt, daß man

$$\frac{p}{n} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{q}{n} = \beta$$

haben müsse.

Substituirt man diese Werthe für $\frac{p}{n}$ und $\frac{q}{n}$ in den Ausdruck (1); so erhält man für die Fläche des Rechteckes AEE_2A_2, dessen Seiten resp. $a = \alpha\lambda$ und $b = \beta\lambda$ sind, den Werth

$$V = \alpha\beta\Phi \qquad \ldots.(2)$$

Hierin bezeichnen α und β zwei absolute Zahlen, welche das Verhältniß der Seiten a und b zu der Längeneinheit λ ausdrücken und Φ ist die Flächeneinheit.

Der Einfachheit wegen ist es nun üblich, in den vorstehenden Ausdruck für $\alpha = \frac{a}{\lambda}$ und $\beta = \frac{b}{\lambda}$ unmittelbar die arithmetischen Zeichen a und b für ihre absoluten Längen einzuführen und das Zeichen Φ für die Flächeneinheit zu unterdrücken. Wenn man hiernach den Werth der Fläche des Rechteckes AEE_2A_2

$$V = ab \qquad \ldots . (3)$$

schreibt; so setzt man immer stillschweigend voraus, daß die beiden Linien a und b durch dieselbe Längeneinheit gemessen seien, und daß sich der numerische Werth des Produktes ab auf Flächeneinheiten beziehe, denen jene Längeneinheit zum Grunde liege. Es wäre jedoch ganz irrig, wenn man den vorstehenden Ausdruck (3) so deuten wollte, daß der Flächeninhalt eines Rechteckes gleich dem Produkte aus seinen beiden Seiten a und b wäre; derselbe stellt nur in abgekürzter Form den durch die Formel (2) ausgesprochenen Satz dar, daß die Anzahl der Flächeneinheiten eines Rechteckes gleich dem Produkte der Anzahlen der Längeneinheiten seiner Seiten a und b sei.

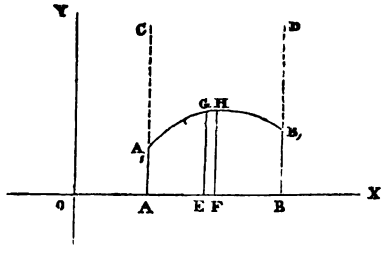
Das vorstehend über die Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechteckes aus seinen Seiten Gesagte gilt zwar nach der dabei gewählten Methode nur für solche Rechtecke, deren Seiten a und b in Beziehung zur Längeneinheit λ kommensurabel oder für welche p und q rationale Zahlen sind, welche alsdann auch immer ganze Zahlen werden können, wenn man danach nur die Größe des obigen Theiles $\frac{\lambda}{n}$ der Längeneinheit oder die Größe der Zahl n gehörig wählt. Da nun aber aus bekannten arithmethischen Gründen alle Sätze, welche von sämmtlichen rationalen Zahlen gelten, auch für die irrationalen Gültigkeit haben; so folgt, daß die obigen Regeln auch auf Rechtecke mit irrationalen und demnach auf alle Rechtecke ohne Ausnahme Anwendung finden. Bei den Rechtecken mit irrationalen Seiten brauchte man sich auch nach §. 11. den Theil $\frac{\lambda}{n}$ der Längeneinheit nur

unendlich klein oder die Zahl n unendlich groß zu denken, wodurch diese Seiten den rationalen gleich werden.

§. 140. Allgemeine Bestimmung des Flächeninhaltes irgend einer ebenen Figur aus ihrer Begränzung.

Betrachten wir zuvörderst eine Figur AA_1GB_1B, welche auf der unteren Seite durch einen Theil AB der Axe OX, seitwärts durch zwei Theile AA_1 und BB_1 der in A und B auf OX verrichteten Perpendikel und oberwärts durch eine beliebige Kurve A_1GB_1, die überall gegen OX konkav ist und außerdem zwischen den in A und B auf OX errichteten Perpendikeln AC und BD liegt, begränzt ist.

Diese Figur kann dadurch entstanden gedacht werden, daß sich die Linie AB aufwärts bewegt, indem sie gleichzeitig ihre Form ändert und in die der Linie A_1GB_1 übergeht.



Die Formveränderung der Linie AB kann aber folgendermaaßen auf eine feste Regel gebracht werden, die zugleich ein Mittel zur Bestimmung des dabei beschriebenen Flächenraumes an die Hand gibt.

Man denkt sich nämlich die AB in ihre Elemente, wie EF, von unendlich geringer Länge dx zerlegt, und nimmt an, daß sich ein jedes derselben parallel zu der Axe OY fortbewege. Diese Elemente beschreiben aber nicht alle gleiche Wege; so beschreibt das bei A liegende Element den Weg AA_1, das bei B liegende den Weg BB_1, das Element EF bewegt sich durch den Raum EG bis in die Lage GH u. s. f. Das Gesetz nun, nach welchem die einzelnen Elemente der Linie AB in der Richtung OY vorrücken, kann offenbar dadurch ausgedrückt werden, daß man den Abstand irgend eines Elementes, wie FF, von irgend einem festen Punkte der Axe OX, z. B. von O, also die Linie OE mit x, ferner den von dem Elemente $EF=dx$ in der Richtung OY durchlaufenen Weg EG mit y bezeichnet, und y als eine Funktion von x angibt. Diese Funktion

$$y = F(x) \qquad \ldots\ldots (4)$$

wird dieselbe sein, welche zwischen der Ordinate $EG = y$ und der Abszisse OE der Kurve A_1GB_1, welche die obere Begränzung der fraglichen Fläche bildet, stattfindet.

Nachdem die Gleichung (4) gegeben ist, stellt sich der arithmetische Ausdruck für die Größe der Fläche AA_1GB_1B leicht dar, wenn man beachtet, daß ein jeder mit OY parallele Streifen derselben, wie EFHG, wegen seiner unendlich geringen Breite EF, wie ein Rechteck von der Breite $EF = dx$ und von der Höhe $EG = y$ angesehen werden kann. Die Fläche dieser elementaren Fläche wird demnach unter Berücksichtigung der in §. 139 näher erörterten Begriffe durch

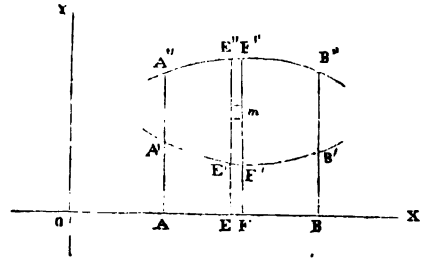
$$y\,dx = F(x).dx$$

dargestellt. Bezeichnet man nun die Abszisse OA mit x_1 und die OB mit x_2; so ist die Fläche AA_1GB_1B gleich der Summe aller der Werthe der vorstehenden Formel, welche man erhält, wenn man darin sukzessive für x die Werthe x_1, x_1+dx, x_1+2dx, $x_1+3dx, \ldots x_2-dx$ substituirt. Die Analyses lehrt, daß diese Summe durch das bestimmte Integral

$$V = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx \qquad \ldots\ldots (5)$$

dargestellt werde, worin man für y den Werth in x aus Gleichung (4) zu substituiren hat.

Ist endlich allgemein der Flächeninhalt einer Figur $A'A''B''B'$ zu bestimmen, welche seitwärts durch die auf OX errichteten Perpendikel $A'A''$ und $B'B''$ und oberhalb und unterhalb durch die



Kurven A″B″ und A′B′ begränzt ist; so leuchtet ein, daß wenn man die Ordinate EE″ irgend eines Punktes der oberen Kurve, welche der Abszisse OE=x angehört, mit y'' bezeichnet, sodaß man

$$y''=F_2(x) \qquad \ldots.(6)$$

hat, der Flächeninhalt der Figur AA″B″B durch

$$V''=\int_{x_1}^{x_2} y''\,dx$$

dargestellt wird, worin x_1=OA und x_2=OB ist.

Bezeichnet man ferner die Ordinate EE′ der unteren Kurve, welche derselben Abszisse OE=x angehört, mit y', sodaß man

$$y'=F_1(x) \qquad \ldots.(7)$$

hat; so wird in gleicher Weise

$$V'=\int_{x_1}^{x_2} y'\,dx$$

der Ausdruck für die Fläche AA′B′B sein.

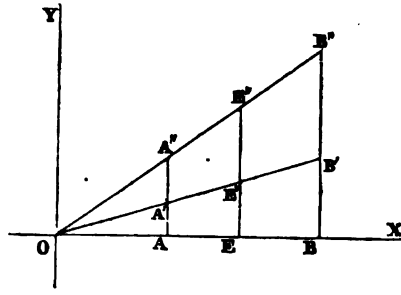
Schneidet man die letztere Fläche von der ersteren ab, was arithmetisch durch die Operation der Subtraktion bewirkt wird; so erhält man für die Fläche A′A″B″B′=V den Ausdruck V″−V′=

$$V=\int_{x_1}^{x_2} y''\,dx-\int_{x_1}^{x_2} y'\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(y''-y')\,dx \qquad \ldots.(8)$$

In dem Ausdrucke auf der rechten Seite dieser Gleichung ist offenbar die Größe $y''-y'$=E′E″; jener Ausdruck würde also dem Falle entsprechen, wo man sich die Fläche A′A″B″B′ in der Weise entstanden dächte, daß sich die Elemente der unteren Kurve A′B′ in paralleler Richtung zu der Axe OY bis in die entsprechenden Örter der oberen Kurve A″B″ bewegten.

§. 141. Flächeninhalt eines Paralleltrapezes, eines Parallelogrammes und eines Dreieckes.

$A'A''B''B'$ sei irgend ein Paralleltrapez mit den parallelen Seiten $A'A''=a$ und $B'B''=b$. Man denke sich die anderen beiden Seiten bis zu ihrem Durchschnittspunkte O und die parallelen Seiten beliebig nach A und B verlängert. Nimmt



man hierauf ein aus dem Punkte O auf die Richtung der parallelen Seiten gefälltes Perpendikel OX als die obige Abszissenare und die Richtung OY jener Parallelen selbst als die Ordinatenare an, errichtet in irgend einem Punkte E zwischen A und B das Perpendikel $EE'E''$, bezeichnet OA mit x_1, OB mit x_2, OE mit x, EE' mit y' und EE'' mit y''; so hat man, weil $A'A''=a$ und $B'B''=b$ ist, die bekannten Beziehungen

$$\frac{a}{x_1}=\frac{y''-y'}{x}=\frac{b}{x_2},$$

woraus

$$y''-y'=\frac{a}{x_1}x=\frac{b}{x_2}x \qquad \ldots.(9)$$

olgt. Setzt man den Einen oder den anderen dieser beiden Werthe für $y''-y'$, z. B. den ersten, in die Formel (8); so erhält man für den Flächeninhalt des Paralleltrapezes $A'A''B''B'$

$$V=\int_{x_1}^{x_2}\frac{a}{x_1}x\,dx=\frac{a}{2x_1}(x_2^2-x_1^2)=\frac{a}{2x_1}(x_2+x_1)(x_2-x_1)$$

$$=\frac{a}{2}\left(\frac{x_2}{x_1}+1\right)(x_2-x_1).$$

Setzt man den perpendikularen Abstand der beiden parallelen Seiten oder die Höhe des Paralleltrapezes $AB = x_2 - x_1 = h$, und beachtet, daß wegen der Gleichungen (9) $\frac{x_2}{x_1} = \frac{b}{a}$ ist; so vereinfacht sich der vorstehende Ausdruck für die Fläche des Paralleltrapezes auf die bekannte Formel

$$V = \tfrac{1}{2}(a+b)h \qquad \ldots\ldots(10)$$

Für den Fall, daß man $y''-y'$ konstant $=b$ hätte, würde sich das Paralleltrapez $A'A''B''B'$ auf ein Parallelogramm von der Grundlinie b und von der Höhe h reduziren. Man erhält für den Flächeninhalt des Letzteren

$$V = \int_{x_1}^{x_2} b\,dx = b(x_2 - x_1) = bh, \qquad \ldots\ldots(11)$$

was einer Substitution von $b=a$ in die Formel (10) entspricht.

Setzt man in der Formel (10) für das Paralleltrapez die Eine parallele Seite $a=0$; so stellt

$$V = \tfrac{1}{2}bh \qquad \ldots\ldots(12)$$

offenbar den Flächeninhalt eines Dreieckes von der Grundlinie b und der Höhe h dar.

§. 142. Flächeninhalt eines Kreises.

Wenn man sich den Punkt O in den Umfang und die Axe OX in die Richtung eines Durchmessers des gegebenen Kreises gelegt denkt, und die Länge des Halbmessers mit r bezeichnet; so findet man für den in die Formel (8) an die Stelle von $y''-y'$ zu setzenden Werth, welcher offenbar die Summe der absoluten Längen der beiden Ordinaten der Kreislinie über und unter jener Axe sein wird,

$$y''-y' = 2\sqrt{2rx-x^2},$$

und für den gesuchten Flächeninhalt des Kreises

$$V = \int_0^{2r} 2\sqrt{2rx - x^2}\,.\,dx.$$

Da nun $\int \sqrt{2rx-x^2}.dx = -\frac{(r-x)\sqrt{2rx-x^2}}{2} + \frac{r2}{2}\text{arc.cos}\frac{r-x}{r}$

ist; so findet man leicht

$$V = \int_0^{2r} \sqrt{2rx-x^2}.dx = r^2\text{arc.cos}(-1) - r^2\text{arc.cos}1 = \pi r^2 \ldots . (13)$$

als eine bekannte Formel für die Kreisfläche vom Halbmesser r.

§. 143. Richtung einer ebenen Fläche.

Aus dem Vorstehenden hat man gesehen, wie die ebenen Flächen von den verschiedensten Quantitäten und den mannichfaltigsten Formen durch die Bewegung der einzelnen Theile oder Elemente einer geraden Linie OX, welche nach beiden Seiten unbegränzt gedacht wird, in einer auf dieser Linie perpendikularen Richtung OY erzeugt werden können.

Die Flächen von verschiedenen Formen zerlegen sich hiernach in eine unendliche Menge elementarer Streifen, von denen ein jeder durch die Bewegung eines Längenelementes der Linie OX in der Richtung OY entstanden ist. Der Inbegriff aller dieser Streifen bildet den Flächeninhalt oder die absolute Quantität der gegebenen Fläche, bei deren Vorstellung man nicht eine besondere Form der äußeren Gränze vor Augen zu haben braucht, und welche demnach als ein Glied der unendlichen Reihe von Flächengrößen angesehen werden kann, die man in §. 138 durch die stetige Bewegung der in der Axe OX irgendwo liegenden Längeneinheit AB in der Richtung OY erzeugte.

Sobald man daher beabsichtigt, nur Untersuchungen über die einfache Quantität und außerdem über solche Eigenschaften der verschiedenen Flächen im Raume anzustellen, bei welcher die Form der äußeren Umgränzung als unwesentliches Merkmal vernachlässigt werden kann; so wird man sich darauf beschränken können, alle Flächengrößen in den einfachen Formen des §s 138, als Rechtecke, anzusehen, deren in der Axe OX liegende Seite gleich der Längeneinheit und deren perpendikular zu OX gerichtete Seite gleich einer Länge ist, deren numerischer Zahlwerth zugleich die Anzahl der in der gegebenen Fläche enthaltenen Flächeneinheiten

zählt. Unter diesem Gesichtspunkte werden die nachfolgenden Betrachtungen über die Richtung der Flächen angestellt werden, welche offenbar zu denjenigen Eigenschaften der Flächengrößen gehört, die von ihrer linearen Begränzung unabhängig sind.

Die Richtung einer geraden Linie war diejenige einzige Dimension des absoluten Raumes, in welcher der erzeugende Punkt von irgend einem festen Nullpunkte aus fortgeschritten sein mußte, um jene Linie der Länge und Lage nach zu erzeugen. Bei einer ebenen Fläche, deren Charakter gleichzeitige Ausdehnung nach zwei aufeinander rechtwinklig stehenden Dimensionen des absoluten Raumes ist, wird die Richtung durch die Lage derjenigen Ebene des absoluten Raumes dargestellt, welche gleichzeitig die beiden Dimensionen OX und OY enthält, durch deren reziprokes Fortschreiten der Einen in der Richtung der anderen die fragliche Fläche erzeugt werden kann. Hieraus ersieht man, daß alle Flächen Ein und derselben Ebene XY im Raume dieselbe Richtung haben, da sie sämmtlich als durch ein Fortschreiten der einzelnen Theile der Dimension OX in der Richtung der Dimension OY entstanden gedacht werden können.

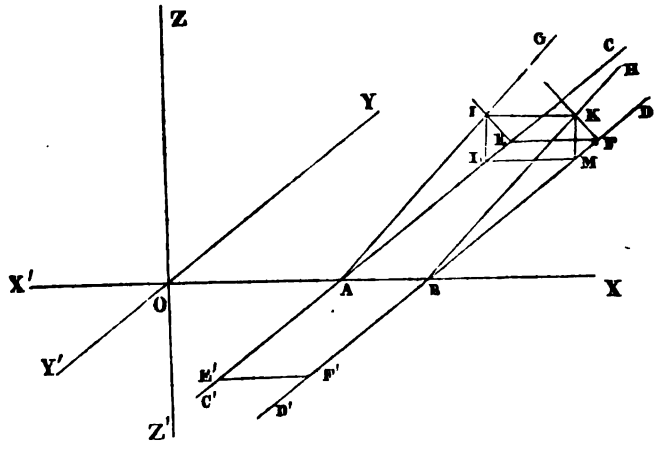
Hieraus folgt, daß das obige System von Flächen (§. 138), dessen Nullpunkt die Längeneinheit AB ist, und dessen Glieder Rechtecke von der Form ABB_2A_2 bilden, nicht bloß alle in der Ebene XY liegenden Flächen ihrer Quantität nach, sondern auch ihrer Richtung nach, welche Letztere allen Gliedern jenes Systemes gemeinschaftlich angehört, vertreten kann.

Die Ebene XY, auf deren Lage im Raume wir die Richtungen aller übrigen Flächen zu beziehen beabsichtigen, nennen wir die primäre Ebene und alle in ihr liegenden Flächen primäre Flächen, ähnlich, wie bei den Längengrößen diejenige Richtung die primäre Axe genannt wurde, auf welche die Richtungen aller übrigen Linien im Raume bezogen werden sollten.

§. 144. Arithmetische Darstellung derjenigen Flächen, welche in Ebenen liegen, die sich gegen die primäre Ebene neigen. — Deklinationskoeffizient.

Alle in der primären Ebene XY liegenden Flächen, welche jetzt nur ihrer Quantität und Richtung nach betrachtet werden,

bei denen also die Form ihrer äußeren Begränzung gar nicht weiter in Betracht kommt, werden auf die Weise entstanden gedacht, daß sich die in irgend einer festen Axe X'X liegende Län-



geneinheit AB in perpendikularer Richtung OY zu der Axe X'X, und zwar nach Ein und derselben Seite von O gegen Y fortbewegt. Die Linie AB ist alsdann der Nullpunkt aller primären Flächen und ein jedes Rechteck, wie ABFE, stellt den absoluten Werth irgend einer Flächenquantität dar.

Wenn man auf diese Weise die sukzessiv immer höheren Glieder AB, ABML, ABFE etc. eines stetigen Systemes von Flächengrößen konstruirt hat; so leuchtet ein, daß man, von jedem dieser Glieder, z. B. von ABFE anfangend, alle niedrigeren Glieder dadurch erzeugen kann, daß man die obere Gränze EF desselben in einer der früheren direkt entgegengesetzten Richtung YOY' fortschreiten läßt, oder daß man das Gesetz, nach welchem sich die Quantitäten des ersteren Systemes bildeten, seiner Richtung nach umgekehrt. Dieser Akt der Rückbildung der Glieder jenes Systemes entspricht in arithmetischer Beziehung der Subtraktion gewisser Flächengrößen von anderen.

Nachdem bei der letzteren Bewegung in der Richtung OY' die Linie EF in die Lage AB gekommen sein wird, hat man das erste Glied 0 des Systemes aller absoluten Flächenräume erreicht. Setzt man die Bewegung in derselben Richtung

über AB hinaus fort; so wird man offenbar ein dem früheren ähnliches System von Flächen, wie ABF'E', erzeugen, deren Quantitäten denen des ersteren Systemes vollkommen gleich sind, welche sich aber dadurch von jenen unterscheiden, daß das Entstehungsprinzip an ihnen in einer der früheren direkt entgegengesetzten Richtung ausgeprägt ist, sodaß, wenn eine Größe der letzteren Art, wie ABF'E', mit einer Größe der ersteren Art, wie ABFE, durch Addition verbunden werden sollte, hierdurch nicht eine Fortbildung oder Vermehrung der letzteren in der Richtung OY, sondern eine Rückbildung oder Verminderung derselben in der Richtung OY' zur Bedingung gemacht würde.

Sowie man also die in der Ebene XY liegenden Flächen danach unterscheidet, ob sie durch eine Bewegung gewisser Theile der Axe X'X in der Richtung OY oder in der entgegengesetzten Richtung OY' entstanden sind, werden die ersteren zu den letzteren in derselben Beziehung stehen, wie alle positiven Größen zu den negativen stehen. Nennt man danach die Flächen ABFE des ersten der beiden eben betrachteten Systeme positive Flächen, und bezeichnet dieselben mit dem Zeichen +; so werden die Flächen ABF'E' negative Flächen sein und das Zeichen — erhalten müssen.

Um die Vorstellung von den positiven und negativen Flächen, welche hiernach beide in derselben Ebene XY liegen würden, strenger zu fixiren, denke man sich die nach allen Seiten erweiterte Ebene XY und die nach beiden Seiten unbegränzte Axe X'X als eine materielle Erfüllung des absoluten Raumes, sodaß an der Ebene XY zwei Oberflächen zu unterscheiden sind, eine obere, auf welcher die Linie OZ normal steht, und eine untere, auf welcher die Verlängerung OZ' von OZ normal steht; in ähnlicher Weise sind an der Axe X'X, wie an einem zylindrischen Stabe, eine unendliche Menge von Seiten zu unterscheiden, welche durch die Richtungen der in der Ebene YZY'Z' vom Punkte O aus gezogenen Linien angedeutet werden; diese Axe X'X liegt dergestalt zwischen der oberen und unteren Fläche von XY, daß sie beide Flächen berührt.

Das Prinzip der Bildung irgend einer Flächengröße besteht nun darin, daß allen Elementen eines Theiles AB der Axe X'X die Fähigkeit mitgetheilt wird, sich parallel zu einer bestimmten

Richtung, z. B. zu OY, so fortzubewegen, daß bei dieser Bewegung stets diejenige Seite der als zylindrisch gedachten Linie AB voranschreitet, welche bei der ursprünglichen Lage in der Axe X'X dem Punkte Y zugekehrt ist; hierbei beschreibt sowol die obere Seite der als Stab gedachten Linie AB, welche dem Punkte Z zugekehrt ist, wie die untere Seite, welche dem Punkte Z' zugekehrt ist, eine mathematische Flächengröße, von denen die obere, also die in der oberen Fläche der als materiell gedachten Ebene XY liegende, die hier betrachtete Größe ist. Ein Rückwärtsschreiten der Linie AB, wobei die fragliche Seite derselben dem Ziele, nach welchem alle Elemente von AB streben, nicht direkt zugewandt, sondern mehr oder weniger abgewandt wäre, ist hiernach unmöglich, und eine solche Bewegung kann nur dann hervorgebracht werden, nachdem die Axe X'X eine halbe Umdrehung um sich selbst gemacht hat, sodaß alsdann die bei der Bewegung voranschreitende Seite von AB dieselbe ist, welche früher, bei der Bewegung in der Richtung OY, voranschritt.

Nachdem sich aber die Axe X'X zur Hälfte um sich selbst gedrehet hat, wird die Seitenkante an ihr, welche die in Rede kommende Fläche beschreibt, nicht mehr in der oberen, sondern in der unteren, dem Punkte Z' zugekehrten Oberfläche der als materiell gedachten Ebene XY liegen, und man erkennt leicht, daß die negativen Flächen ABF'E', als auf der unteren Seite der Ebene XY, auf welcher OZ' normal steht, liegend, angesehen werden müssen, während die positiven Flächen ABFE auf der oberen Seite jener Ebene liegen, auf welcher OZ normal steht, oder daß die negativen Flächen aus den positiven erhalten werden, wenn man sich denkt, daß die ersteren um die Axe X'X eine halbe Umdrehung gemacht haben.

Hiernach kann man sich denken, die positiven Flächen seien solche, welche auf der oberen Seite der als materiell angesehenen Ebene XY durch die Bewegung einer beliebigen geraden oder krummen Linie in ganz beliebigen Richtungen erzeugt sind, und die negativen Flächen seien solche, welche durch eine halbe Umdrehung aus den positiven entstehen, demnach auf der unteren Seite der Ebene XY liegen, gleichviel, durch welche

gerade oder krumme Linie und in welchen Richtungen dieselben erzeugt seien.

Man erkennt zwischen der vorstehenden Beziehung der negativen Flächen zu den positiven und zwischen der Erzeugung der ersteren durch den Fortschritt der Gränze AB in der Richtung OY und der Erzeugung der letzteren durch den Fortschritt der Gränze AB in der Richtung OY', nachdem dieselbe eine halbe Umdrehung um sich selbst gemacht hat, leicht die Analogie zu der Beziehung, welche zwischen den positiven und negativen Linien, sowie zwischen der Erzeugung der ersteren durch den Fortschritt eines Punktes in derselben Richtung und der Erzeugung der letzteren durch den Fortschritt jenes Punktes in entgegengesetzter Richtung, nachdem dieser Punkt ebenfalls eine halbe Umdrehung um sich selbst gemacht hat (s. §. 33). Schlägt man nun hier einen jener Analogie entsprechenden und in den §§. 35 bis 45 für die Längengrößen näher entwickelten Gang der Betrachtung ein, indem man beachtet, daß einer halben Umdrehung der positiven Flächen ABFE um die Axe X'X eine Multiplikation mit dem Faktor -1 oder $(-)$ entspricht; so findet man zuvörderst, daß einer Viertelumdrehung jener Größen, wobei dieselben in die Ebene XZ gelangen, welche in X'X auf der primären Ebene XY perpendikular steht, eine Multiplikation mit dem Faktor $\sqrt{-1}$ oder $(-)^{\frac{1}{2}}$ entsprechen muß. Diese Ebene XZ, welche die Richtung der imaginären oder sekundären Flächen bezeichnet, wollen wir die sekundäre Ebene nennen.

Allgemein zeigt sich, daß wenn die durch X'X gelegte Ebene GABH mit der primären Ebene den Winkel $GAC = m\pi$ einschließt, die Fläche ABKJ, deren absolute Quantität gleich der von ABFE oder $=A$ ist, durch

$$(-)^m A$$

dargestellt sein wird. Daß eine Flächengröße sowol ihrer Quantität A, wie ihrer Richtung nach betrachtet sei, werden wir auch hier, wie bei den Linien, dadurch bezeichnen, daß wir dieselbe in Klammern einschließen. Hiernach hat man die Gleichung

$$(A) = (-)^m A \qquad \ldots\ldots (14)$$

Gehen wir jetzt weiter, und suchen wir eine jede Flächen-

größe, als die Potenz irgend einer Grundzahl a, also in der Form a^{φ} darzustellen. Wenn wir uns hier statt des in §. 44 und 45 betrachteten Vektorradius eine Fläche ABKJ vorstellen, deren Breite in der Richtung X'X stets gleich der Längeneinheit und deren Länge AJ gleich der Länge jenes Vektors ist, während sich ihre Ebene unter demselben Winkel JAE gegen die primäre Ebene neigt, unter welchem sich dort der Vektorradius gegen die primäre oder reelle Axe neigte; so findet man auch hier, daß wenn $a > 1$ ist, durch $a^{+\varphi}$ diejenigen Flächen dargestellt werden, welche größer sind, als die Flächeneinheit ABFE und durch $a^{-\varphi}$ diejenigen Flächen, welche kleiner sind, als jene Flächeneinheit. Für $\varphi = 0$ erhält man durch die Formel a^{φ} die Flächeneinheit ABFE selbst. Läßt man nun, von diesem Werth a^{0} anfangend, Ein Mal φ in der Reihe der positiven Zahlen und ein anderes Mal in der Reihe der negativen Zahlen aufsteigend variiren; so entspricht Dies Ein Mal einer Bewegung der Linie EF in der Richtung OY und das andere Mal einer Bewegung derselben Linie in der entgegengesetzten Richtung YO. Die letztere Bewegung der Linie EF kann nur dann als möglich gedacht werden, nachdem sich dieselbe, wie ein materieller Stab zur Hälfte um sich selbst gedrehet hat, sodaß diejenige Seite derselben, welche vorher voranschritt, auch bei der letzteren Bewegung voranschreitet. Läßt man die Linie EF aber nicht gerade eine halbe Umdrehung $= \pi$, sondern einen beliebigen Theil derselben $= m\pi$ annehmen; so wird dieselbe augenblicklich sich über der Ebene XY in einer Ebene EFKJ erheben, welche sich unter dem Winkel $m\pi$ gegen jene neigt. Die hierdurch erzeugte neue Fläche ABKJ wird durch $a^{(-)^{m}\varphi}$ dargestellt sein (§. 54). Hält man nun m konstant, und läßt man φ unter den absoluten Zahlen von 0 an stetig variiren; so wird $a^{(-)^{m}\varphi}$ nach und nach die verschiedenen Flächen ABKJ darstellen, deren untere Begränzung AB ist, und deren obere Begränzung JK der Länge nach ebenfalls gleich der Einheit AB ist, deren sukzessive Lagen aber eine spiralförmige Fläche von konstanter Breite um die Axe X'X beschreiben. Die letztere Fläche besitzt ferner die Eigenschaft, daß sich jede Berührungsfläche an derselben, z. B. die längs der Linie JK an dieselbe gelegte, sich unter dem konstanten Winkel $m\varkappa$ gegen

die Fläche ABKJ neigt. Irgend ein Durchschnitt dieser Fläche mit einer zu YZ parallelen Ebene bildet ferner eine logarithmische Spirale.

Setzt man nun in dem Ausdrucke $a^{(-)^m\varphi}$ $m=\frac{1}{2}$ und $a=$ der Basis e der natürlichen Logarithmen; so werden durch die Formel

$$e^{\varphi\sqrt{-1}},$$

wenn man darin φ von 0 bis ∞ variiren läßt, alle Flächen, wie ABKJ dargestellt, deren absolute Quantität gleich der Flächeneinheit ABFE ist, und bei welcher die Gränze JK die Oberfläche eines Zylinders mit kreisförmigem Querschnitte bildet, dessen Halbmesser $AE=AJ=$ der Längeneinheit ist. Außerdem ist bei einer jeden durch $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ dargestellten Fläche ABKJ der Neigungswinkel JAE derselben gegen die primäre Ebene XY gleich φ (s. die Untersuchungen des §s 45.) und man hat demnach auch hier

$$(A)=Ae^{\varphi\sqrt{-1}}=(-)^mA \qquad \ldots.(15)$$

oder

$$e^{\varphi\sqrt{-1}}=(-)^m,$$

worin $\varphi=m\pi$ ist.

Da nun ferner $e^{\varphi\sqrt{-1}}=\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1}$ ist; so hat man auch

$$(A)=(-)^mA=Ae^{\varphi\sqrt{-1}}=A(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$$
$$=A\cos\varphi+A\sin\varphi.\sqrt{-1} \qquad \ldots.(16)$$

Ist nun die absolute Quantität der Fläche ABKJ gleich A, sodaß die Linie AJ A Längeneinheiten enthält, und ist ABML die Projektion jener Fläche auf die primäre Ebene XY und LMKJ die Projektion derselben auf die sekundäre Ebene XZ, sodaß die Anzahl der in AL und LJ enthaltenen Längeneinheiten resp. gleich $A\cos\varphi$ und $A\sin\varphi$ ist; so hat man offenbar

$$ABML=A\cos\varphi \text{ und}$$
$$LMKJ=A\sin\varphi$$

und die Fläche (ABKJ) stellt sich nach Gleichung (16) als die arithmetische Summe

$$(ABML)+(LMKJ)$$

ihrer Projektionen resp. auf die primäre und auf die sekundäre Ebene dar.

Es erhellet, daß dieses Resultat von der Form der in der Ebene GABH liegenden Fläche A ganz unabhängig ist. Denn denkt man sich dieselbe von einem beliebigen linearen Zuge eingeschlossen, und alsdann durch Parallelen zu den beiden rechtwinkligen Richtungen AB und AG in eine unendliche Menge einander gleicher Quadrate von gleichem und unendlich kleinem Inhalte zerschnitten; so wird die Anzahl dieser kleinen Quadrate genau so groß sein, als wenn man die Fläche ABKJ, deren Größe ebenfalls = A sein soll, durch ähnliche Parallelen in gleich große Quadrate von demselben Inhalte zerschnitten wäre. Ein jedes dieser Quadrate wird sich nun in derselben Weise sowol aus der Einen, wie aus der anderen Figur von dem Flächeninhalte A, auf die Ebene XY und auch auf die Ebene XZ, überhaupt auf jede beliebige Ebene im Raume projiziren. Hieraus folgt, daß die Summe der Projektionen jener Quadrate auf irgend eine Ebene aus der Einen Figur gleich der aus der anderen sein wird, und daß daher eine jede Figur der Ebene GAB vom Inhalte A durch die Formel

$$(A) = A\cos\varphi + A\sin\varphi . \sqrt{-1}$$

als die arithmetische Summe ihrer Projektionen auf die primäre und sekundäre Ebene dargestellt wird.

Analog, wie bei den Linien, nennen wir den Neigungswinkel der Ebene, in welcher die Fläche A liegt, gegen die primäre Ebene XY die Deklination jener Fläche und den Koeffizienten

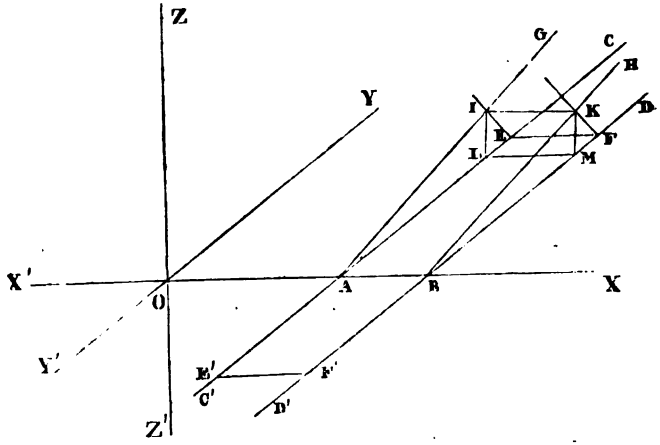
$$D = (-)^m = e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1} \qquad \ldots . (17)$$

den Deklinationskoeffizienten derselben.

§. 145. Bemerkungen über den Gebrauch des Deklinationskoeffizienten der Flächen.

Wenn wir uns die Ebene XY als materiell, mit einer oberen und unteren Seite denken, auf welcher resp. OZ und OZ' normal steht; so ist es gleichgültig, durch welche Bewegung der Linie AB wir uns eine primäre Fläche entstanden denken: dieselbe wird positiv sein, wenn sie auf der oberen Seite von XY

liegt, und negativ, wenn sie auf der unteren Seite von XY liegt; die positiven und negativen Flächen entstehen alsdann einfach



durch eine halbe Umdrehung der Ebene XY auseinander. Ist also in dem Ausdrucke

$$(A) = A\cos\varphi + A\sin\varphi \cdot \sqrt{-1}$$

für die Fläche (AK) die Größe $\cos\varphi$ positiv; so liegt die Projektion $(AM) = A\cos\varphi$ auf der oberen Seite von XY und ist dem Punkte Z zugewandt. Ist nun die Fläche AF durch die Drehung um den Winkel φ in die Lage AK gekommen, und denkt man sich auch AK als eine materielle Ebene, auf deren oberer Seite die fragliche Fläche A liegt; so zeigt der Umstand, daß ihre Projektion auf XY positiv oder dem Punkte Z zugekehrt sei, an, daß die Fläche A in perpendikularer Richtung zur Ebene XY ebenfalls dem Punkte Z, und nicht dem Punkte Z', zugekehrt sei, oder daß die Normale auf A mit der Axe OZ einen spitzen Winkel bilde. Wenn der Winkel φ zwischen 90 und 270° liegt, wird die Projektion $A\cos\varphi$ negativ sein, also auf der unteren Fläche von XY liegen, oder dem Punkte Z' zugekehrt sein, sodaß für diese Lagen die Normale auf A mit der Axe OZ' einen spitzen oder mit OZ' einen stumpfen Winkel bildet. Für Werthe von φ zwischen 270 und 360° wird dagegen die Projektion $A\cos\varphi$ wieder positiv werden, auf der oberen

Fläche von XY liegen und dem Punkte Z zugekehrt sein, sodaß als dann die Normale auf der Fläche A mit der Axe OZ wieder einen spitzen Winkel einschließt.

Wenn die primäre Ebene XY durch Drehung um 90° in die Lage der sekundären Ebene XZ gekommen ist, werden die positiven sekundären Flächen auf derjenigen Seite von XZ liegen, auf welcher OY′ normal steht, und die negativen sekundären Flächen werden auf der anderen Seite von XZ liegen, auf welcher OY normal steht. Wird nun die Fläche (AK)=(A) als arithmetische Summe

$$(AM)+(LK)=A\cos\varphi+A\sin\varphi\,.\,\sqrt{-1}$$

ihrer beiden Projektionen auf die Richtungen der Ebenen XY und XZ dargestellt; so hat man sich an die Stelle der Projektion $(LK)=A\sin\varphi.\sqrt{-1}$, welche von der äußeren Gränze LM der Projektion AM in die äußere Gränze der rechtwinkligen Fläche AK führt, gewissermaaßen einen Theil der sekundären Ebene XZ gesetzt, oder diese Ebene parallel mit sich selbst in die Ebene LK verrückt zu denken.

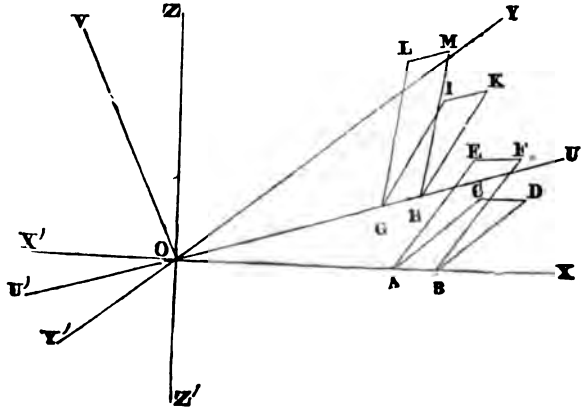
Ist alsdann $\varphi<180°$, also $\sin\varphi$ positiv; so liegt die Projektion $A\sin\varphi.\sqrt{-1}$ auf der vorderen Fläche von XZ oder MJ und ist dem Punkte Y′ zugekehrt, d. h. die Fläche A ist in perpendikularer Richtung zu der Ebene XZ ebenfalls dem Punkte Y′ zugekehrt, oder die Normale auf A bildet mit der Axe OY′ einen spitzen Winkel. Liegt dagegen φ zwischen 180 und 360°, ist also $\sin\varphi$ negativ; so befindet sich die Projektion $A\sin\varphi\sqrt{-1}$ auf der hinteren Seite von XZ und ist dem Punkte Y zugekehrt, sodaß in diesem Falle die Normale auf A mit der Axe OY einen spitzen, oder mit OY′ einen stumpfen Winkel einschließt.

Durch diese Vorstellung wird alle Zweideutigkeit der Lage der Fläche AK mit ihrer nur nach Einer Seite verlängerten Normalen, welche bei der anfänglichen Lage jener Fläche in der Ebene XY mit Axe OZ zusammenfiel, gehoben. Man erkennt, daß sich zwei Flächen mit entgegengesetzten Deklinationskoeffizienten, wie $A(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$ und $-A(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$ dadurch von einander unterscheiden, daß sie auf den beiden entgegengesetzten Seiten Ein und derselben nach allen Richtungen hin erweiterten Ebene liegen, oder daß ihre Normalen direkt ent-

gegengesetzte Richtungen besitzen. Wird z. B. die Fläche AK, welche auf der oberen Seite derselben Ebene liegt, ferner um 180° gedreht; so wird ihr Deklinationskoeffizient $\cos(\varphi+\pi)+\sin(\varphi+\pi)\sqrt{-1}=-(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$ und dieselbe fällt alsdann, wenn sie gehörig erweitert wird, mit der Richtung derjenigen Flächen zusammen, welche jetzt auf der unteren Seite der Ebene AK liegen.

§. 146. Arithmetische Darstellung der Flächen in den verschiedensten Ebenen des Raumes. — Inklinationskoeffizient.

Nachdem man im Raume die primäre Ebene XY festgelegt und darin eine Axe X′X mit der Perpendikularen OY angenommen hatte, traten alle diejenigen Flächen, welche in Ebenen lagen, die sich gegen XY neigten, und zugleich durch die Axe X′X gingen, in diejenigen Beziehungen zu einander und zu den primären Flächen, welche im vorhergehenden Paragraphe entwickelt und mit Hülfe des Deklinationskoeffizienten dargestellt sind. Die Wahl der Axe X′X in der Ebene XY war hierbei jedoch ganz willkürlich, da die Richtung einer Ebene oder irgend einer darin liegenden Figur durch jede zwei beliebige rechtwinklige Axen derselben bestimmt ist; man hätte jener Axe jede beliebige andere Richtung in jener Ebene geben können. Hätte man z. B. statt X′X die Axe U′U genommen, auf welcher OV perpendikular



steht; so würde eine in U'U auf XY normal stehende Ebene die sekundäre geworden sein. Flächen, wie GHML, welche in Ebenen liegen, die sich unter dem Winkel φ gegen die primäre Ebene neigen und außerdem durch die Axe U'U gehen, würden alsdann durch

$$A(\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \sqrt{-1})$$

dargestellt sein, und zu einander und zu den primären Flächen der Ebene UV genau in derselben Beziehung stehen, wie die Flächen ABFE von derselben Deklination zu einander und zu denselben primären Flächen der Ebene XY standen.

Dessenungeachtet haben die Flächen GHML und ABFE oder ihre Ebenen ganz verschiedene Richtungen im Raume, da ihnen gleichzeitig nicht zwei, sondern nur Eine Dimension des absoluten Raumes, nämlich ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie, gemein ist.

Man erkennt, daß eine jede Fläche, wie GM, auf zwei Weisen aus der ihrer Quantität entsprechenden primären Fläche AD erzeugt werden kann. Entweder so, daß sich die Ebene von AD zuvörderst um die Axe X'X um den Winkel $FBD = \varphi$ drehet, wodurch AD in die Lage AF kommt, und daß sich alsdann die Fläche AF um die Axe OZ um den Winkel $UOX = \psi$ drehet, wodurch AF die Lage GM annimmt, oder auf die Weise, daß sich die Fläche AD zuvörderst um die Axe OZ um den Winkel $UOX = \psi$ drehet, wodurch dieselbe in die Lage GK übergeht, und daß sich alsdann GK um die Axe OU um den Winkel $MHK = \varphi$ drehet, wodurch offenbar dieselbe Lage GM, wie vorhin, erreicht wird.

Da nun die Drehungen einer primären Fläche A um eine in der Ebene XY liegende Axe X'X oder U'U arithmetisch durch die Multiplikation mit dem Deklinationskoeffizienten

$$D = \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \sqrt{-1}$$

dargestellt wird; so ist man zu dem Schlusse berechtigt, daß eine Drehung irgend einer Fläche um die auf der primären Axe XY perpendikular stehende Axe Z'Z durch einen ähnlichen Koeffizienten J, welchen wir wiederum den Inklinationskoeffizienten nennen werden, arithmetisch ausgedrückt sei. Wie nun in geometrischer Beziehung die vorhin erwähnten beiden Methoden der

Drehung, durch welche AD in die Lage GM gelangen kann, zu demselben Resultate führen; ebenso wird in arithmetischer Bedeutung die Reihenfolge, in welcher die Multiplikationen mit den beiden Koeffizienten D und J an einer Flächengröße (A) vollzogen werden, einerlei Resultat ergeben. Man hat allgemein für die ihrer Quantität und Richtung nach betrachtete Fläche GM

$$(A) = JDA.$$

Behuf Darstellung des Inklinationskoeffizienten J ist es erforderlich, eine neue arithmetische Einheit einzuführen, durch welche die verschiedenen Inklinationen UOX der Flächen GM nach Analogie der Deklinationen MHK gemessen werden können. Hierzu wählen wir wieder, wie im zweiten Abschnitte bei den Längengrößen, das Zeichen $\div$ oder den Koeffizienten $\div 1$, welcher an den damit behafteten Größen eine Inklination oder eine Drehung um die Axe OZ von $\pi = 180^\circ$ bezeichnet.

Wie in §. 104 ff., findet man nun leicht, daß der Koeffizient

$$(\div)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\div 1}$$

eine Inklination oder Drehung einer Fläche um die Axe OZ um den Winkel $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ bezeichnet. Wird hiernach eine sekundäre, in der Ebene XZ liegende Fläche $A\sqrt{-1}$ nochmals mit dem Inklinationskoeffizienten $\sqrt{\div 1}$ für eine Viertelumdrehung um die Axe OZ behaftet; so erhält man als Ausdruck der in der Ebene YZ liegenden Flächen die allgemeine Formel

$$(A) = A\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}.$$

Die durch den Koeffizienten $\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$ bezeichnete Ebene YZ, welche in der Axe Y'Y auf der primären Ebene perpendikular steht, werden wir die *tertiäre Ebene* und alle darin liegenden Flächen *tertiäre Flächen* nennen.

Es zeigt sich ferner ohne Schwierigkeit, daß der allgemeine Ausdruck des Inklinationskoeffizienten J für irgend eine Inklination oder Drehung um die Axe OZ von $UOX = \psi = n\pi$

$$J = (\div)^n = e^{\psi\sqrt{-1}} = \cos\psi + \sin\psi . \sqrt{\div 1} \qquad \ldots . (18)$$

sein wird. Hinsichtlich der Bedeutung der Größen $\cos$ und $\sin$ s. §. 104ᵉ.

Der Faktor

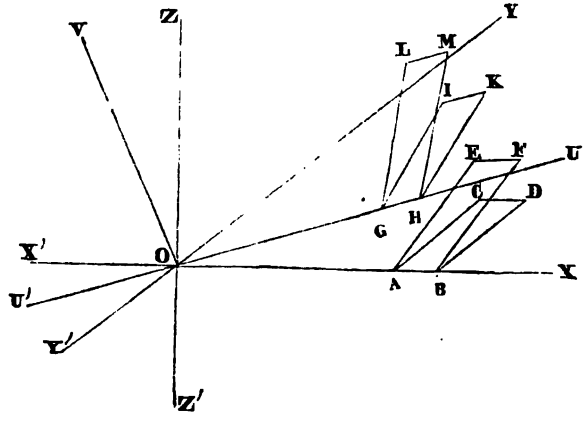
$$JD = (\cos\psi + \sin\psi . \sqrt{\div 1})(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{\div 1}, \quad \ldots . (19)$$

wodurch die Richtung irgend einer Fläche GM im Raume in Beziehung zu der Richtung der primären Ebene XY und der Äre X'X vollkommen bestimmt ist, heiße auch hier der vollständige Richtungskoeffizient der Flächen.

§. 147. Bemerkungen über die Bedeutung und den Gebrauch des Inklinationskoeffizienten der Flächen.

Wenn eine primäre Fläche AD mit irgend einem Inklinationskoeffizienten $\cos\psi + \sin\psi . \sqrt{\div 1}$ behaftet wird; so entspricht Dies einer Drehung derselben in der primären Ebene XY selbst, ähnlich, wie eine Multiplikation der primären Linien mit einem solchen Koeffizienten nur einer Drehung derselben in der primären Äre selbst entsprach. Jene Flächen $+A$, $\div A$, $A\sqrt{\div 1}$, $\div A\sqrt{\div 1}$ und allgemein $A(\cos\psi + \sin\psi . \sqrt{\div 1})$ oder $-A$, $\div -A$, $-A\sqrt{\div 1}$, $\div -A\sqrt{\div 1}$ und allgemein $-A(\cos\psi + \sin\psi . \sqrt{\div 1})$ bleiben daher resp. positive oder negative primäre Flächen von der Quantität A. Betrachtet man dieselben also nur als additive oder subtraktive Größen; so sind die ersteren mit $+A$ und die letzteren mit $-A$ gleichbedeutend. Sobald dieselben jedoch als Faktoren auftreten und mit einem Deklinationskoeffizienten $D = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$ zu multipliziren sind, macht sich ein charakteristischer Unterschied zwischen denselben kenntlich, da z. B. die Fläche

$$(GK) = A(\cos\psi + \sin\psi . \sqrt{\div 1})$$



bei einer Multiplikation mit $D = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$ in die Ebene GM tritt, während

$$(AD) = A$$

bei einer Multiplikation mit demſelben Koeffizienten in die Ebene AF gelangt.

Auch nach Dem, was in §. 145 über den Charakter entgegengeſetzter Flächen geſagt iſt, geht hervor, daß die Projektion irgend einer Fläche im Raume auf die Ebene XY, ſei dieſe Projektion nun poſitiv oder negativ primär, durch eine ſpätere Drehung jener Fläche um die Axe OZ niemals in die entgegengeſetzte, alſo reſp. negative oder poſitive verwandelt werden könne. Eine Fläche, wie $AF = A$ z. B., welche auf der oberen Seite der Ebene AF liegt, mithin bei der Lage in der obigen Figur eine Deklination von $\varphi < 90^0$ beſitzt und eine poſitive Projektion $A\cos\varphi$ auf die Ebene XY hat, wird auch bei jeder ferneren Drehung um die Axe OZ, wobei ſie z. B. in die Lage GM kommt, auf der oberen Seite jener Fläche liegen bleiben, ſich daher in perpendikularer Richtung zu XY immer demſelben Punkte Z zukehren und folglich ſtets eine Projektion auf jene Ebene haben müſſen, welche ſich ebenfalls demſelben Punkte Z zugekehrt oder ſtets poſitiv iſt.

Daſſelbe gilt von den negativen primären Flächen oder den negativen Projektionen auf die Ebene XY, welche immer, als auf der unteren Seite liegend, gedacht werden, auf welcher OZ′ normal ſteht.

Wenn eine auf der oberen Seite der Ebene AF liegende Fläche um die Axe X′X ſo viel weiter gedrehet wird, daß ſie ſich unter dem Deklinationswinkel $\pi - \varphi$ gegen die Ebene XY neigt, ſo wird ihre primäre Projektion negativ werden. Drehet man jene Fläche jedoch um 180° um die Axe OZ; ſo wird ihre primäre Projektion poſitiv bleiben; in der That iſt jene Fläche, obgleich ihre Ebene in beiden Fällen in dieſelbe Ebene des abſoluten Raumes fällt, im erſten Falle dem Punkte Z′, im zweiten dem Punkte Z zugekehrt. Vermehrt man die Deklination der Fläche AF durch Drehung um X′X bis auf $2\pi - \varphi$; ſo wird ihre Lage nochmals mit den beiden eben betrachteten in dieſelbe Ebene des abſoluten Raumes fallen; ihre Projektion auf XY wird alsdann

aber wieder positiv, wie bei der um 180° um die Axe OZ gedreheten, und es leuchtet ein, daß diese beiden Flächen auch auf derselben oberen, dem Punkte Z zugekehrten Seite einer überall erweiterten Ebene liegen, welche mit der Ebene XY die Deklination $\pi - \varphi$ oder $2\pi - \varphi$ einschließt.

Ferner stellt sich heraus, daß die positiven sekundären Flächen der Ebene XZ, welche durch eine Drehung der positiven primären Flächen um die Axe X'X um 90° in der Richtung YZ entstanden sind, auf der vorderen Seite der sekundären Ebene liegen, welche dem Punkte Y' zugekehrt ist, während die negativen sekundären Flächen auf der hinteren Seite von XZ liegen, welche dem Punkte Y zugekehrt ist. Bei einer Behaftung einer sekundären Fläche $\pm A\sqrt{-1}$ mit dem Inklinationskoeffizienten $\div 1$ für eine Drehung von 180° um die Axe OZ wird nun offenbar die fragliche Fläche auf die entgegengesetzte Seite der als materiell gedachten Ebene XZ transportirt. Hieraus folgt, daß wenn man jene Flächen nur ihrer Größe und Lage nach anschauen, oder wenn man dieselben nur als additive oder subtraktive Größen, und nicht als Faktoren, in eine arithmetische Rechnung verflechten will, man einfach $\mp A\sqrt{-1}$ für $\div(\pm A\sqrt{-1})$ substituiren kann.

Endlich erhellet, daß die positiven tertiären Flächen der Ebene YZ, welche durch Drehung der positiven sekundären Flächen um die Axe OZ entstanden sind, auf der rechten, dem Punkte X zugekehrten Seite, und daß die negativen tertiären Flächen auf der linken, dem Punkte X' zugekehrten Seite der als materiell gedachten Ebene YZ liegen. Da auch diese Flächen durch eine halbe Umdrehung um die Axe OZ oder bei der Behaftung mit dem Faktor $\div 1$ von der Einen Seite der Ebene YZ auf die entgegengesetzte geführt werden; so folgt, daß man unter den mehrfach bezeichneten Einschränkungen allgemein $\div(\pm A\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}) = \mp A\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$ setzen könne.

Aus dem Vorstehenden geht eine Übereinstimmung zwischen der Bedeutung des Inklinationskoeffizienten der Flächen mit dem im vorhergehenden Abschnitte betrachteten Inklinationskoeffizienten der Linien unzweideutig hervor. Dieser Koeffizient affizirt die Flächen in einer ihrem Charakter entsprechenden Weise genau so, wie die Linien. Man bemerkt auch, daß man die Richtung einer

Fläche sehr gut durch die Richtung einer auf ihr errichteten, nur nach Einer Seite verlängerten Normalen bestimmen könnte. Denkt man sich nämlich die Fläche in ihrer primären Lage mit der oberen Fläche der Ebene XY zusammenfallend; so wird die fragliche Normale mit der Axe OZ, wie mit einer primären Axe, zusammenfallen und sich bei der obigen Drehung der Fläche in Beziehung zu jener Axe OZ gerade so bewegen, wie sich die im vierten Abschnitte betrachteten deklinanten und inklinanten Linien gegen die primäre Axe bewegten.

§. 148. Darstellung irgend einer ebenen Fläche im Raume vermittelst des vollständigen Richtungskoeffizienten.

Aus dem im vorstehenden Paragraphe über die Einwirkung des Inklinationskoeffizienten auf die primären, sekundären und tertiären Flächengrößen Gesagten geht hervor, daß man die Multiplikation des Inklinationskoeffizienten mit dem Deklinationskoeffizienten in dem allgemeinen Ausdrucke

$$(A)=A(\overset{\cos}{..}\psi+\overset{\sin}{..}\psi.\sqrt{\div 1})(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1}) \quad \ldots.(20)$$

bis zu der Entwickelung

$$(A)=A\cos\varphi(\overset{\cos}{..}\psi+\overset{\sin}{..}\psi.\sqrt{\div 1})+A\sin\varphi\overset{\cos}{..}\psi.\sqrt{-1}$$
$$+A\sin\varphi\overset{\sin}{..}\psi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(21)$$

ausführen und alsdann einfach

$$(A)=A\cos\varphi+A\sin\varphi\cos.\psi\sqrt{-1}+A\sin\varphi\sin\psi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}\ldots(22)$$

setzen könne, wenn es nur darauf ankommt, die Fläche (A) in ihrer Quantität und Richtung zu der Größe der Flächeneinheit und zu der Richtung der primären Ebene anzuschauen oder dieselbe als Summand oder Subtrahend, nicht aber als Faktor, zu gebrauchen, in welchem letzteren Falle die Abkürzung der Formel (22) nicht stattfinden darf und entweder der vollständige Ausdruck (21) oder (20) beibehalten werden muß (vergl. §. 106).

Aus der Gleichung (22) geht hervor, daß sich irgend eine Fläche (A) als die arithmetische Summe dreier anderer Flächen darstellt, welche resp. in den Richtungen der primären, sekundären und tertiären Ebene liegen und die Projektionen von (A) auf diese Ebenen bilden. Die absoluten Werthe der zuletzt erwähn-

ten Projektionen von (A) reſp. auf die Ebene XY, XZ, YZ ſind gleich den abſoluten Werthen von

$$A\cos\varphi,\quad A\sin\varphi\cos\psi,\quad A\sin\varphi\sin\psi.$$

Jenachdem eine Projektion auf der oberen oder unteren Seite der Ebene XY, der vorderen oder hinteren Seite der Ebene XZ, der rechten oder linken Seite der Ebene YZ liegt, d. h. jenachdem ſich dieſe Projektionen dem Punkte Z oder Z', dem Punkte Y' oder Y, dem Punkte X oder X' zuwenden, ſind ſie poſitiv oder negativ, und umgekehrt. Diejenige Seite der Ebene, auf welcher die Fläche (A) liegend gedacht wird, oder auf welcher ihre nur nach Einer Seite verlängerte Normale errichtet iſt, wendet ſich in den vorſtehenden Fällen ebenfalls reſp. dem Punkte Z oder Z', dem Punkte Y' oder Y, dem Punkte X oder X' zu, d. h. die fragliche Normale bildet reſp. mit OZ oder OZ', mit OY' oder OY, mit OX oder OX' einen ſpitzen Winkel; die ſpitzen Winkel mit OZ', OY oder OX' entſprechen alsdann auch ſtumpfen Winkeln mit OZ, OY', OX und umgekehrt.

Dem Zeichen + und — nach entgegengeſetzt ſind überhaupt ſolche Flächen, welche auf den beiden entgegengeſetzten Seiten Ein und derſelben unbegränzten Ebene liegend gedacht werden müſſen, oder deren Normalen eine entgegengeſetzte Richtung haben.

Hiernach verſchwindet jede Zweideutigkeit über die Lage einer mit Hülfe des Richtungskoeffizienten dargeſtellten Fläche. Dieſer Koeffizient bezeichnet die Lage jener Fläche immer ſo, alswenn ſie durch die obigen Akte der Drehung um die Aren X'X und Z'Z aus der poſitiven primären Lage der Ebene XY, auf welcher OZ normal ſteht, in die neue Lage gekommen wäre.

§. 149. Bezeichnen wir jetzt wieder die Deklination der Fläche (A) oder den Neigungswinkel ihrer Ebene gegen die primäre Ebene XY mit α, und die Inklination, d. h. den Winkel, um welchen ſich dieſe Ebene um die Are OZ gedrehet hat, oder auch den Neigungswinkel der Durchſchnittslinie der Ebene von (A) mit der primären Ebene XY gegen die Are OX mit φ, wie Dies auch in §. 110 ff. des vierten Abſchnittes bei den Längengrößen geſchehen iſt; ſo hat man allgemein

$$(A)=A(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{\mp 1})(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1}) \quad \ldots.(23)$$

oder abgekürzt

$$(A)=A\cos\alpha+A\sin\alpha\cos\varphi.\sqrt{-1}+A\sin\alpha\sin\varphi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(24)$$

Nimmt man an, die Fläche (A) sei mit Hülfe dieses abgekürzten Richtungskoeffizienten durch ihre Projektionen X, Y und Z resp. auf die primäre, sekundäre und tertiäre Ebenen XY, XZ und YZ in der Form

$$(A)=X+Y\sqrt{-1}+Z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(25)$$

gegeben; so hat man wegen dieser und der vorhergehenden Gleichung die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} X &= A\cos\alpha, \\ Y &= A\sin\alpha\cos\varphi, \\ Z &= A\sin\alpha\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(26)$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$A=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \quad \ldots\ldots(27)$$

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{X}{A},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{Y^2+Z^2}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{\sqrt{Y^2+Z^2}}{A}$$

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\sqrt{Y^2+Z^2}}{X}, \quad \ldots\ldots(28)$$

$$\cos\varphi=\frac{Y}{\sqrt{Y^2+Z^2}},\ \sin\varphi=\frac{Z}{\sqrt{Y^2+Z^2}},\ \operatorname{tang}\varphi=\frac{Z}{Y} \quad \ldots\ldots(29)$$

In diesen Gleichungen ist die Wurzelgröße $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, welche die absolute Quantität A darstellt, stets positiv zu nehmen. Die Wurzelgröße $\sqrt{Y^2+Z^2}$ bleibt jedoch ebenso zweideutig, wie die Wurzelgröße $\sqrt{y^2+z^2}$ in den Gleichungen (17) und (18) des §s 106; es ist nur erforderlich, daß dieselbe in allen Ausdrücken mit demselben Zeichen genommen werde. Man überzeugt sich auch hier bei den Flächen, wo die Drehungen der Deklination und Inklination um ganz andere Axen vor sich gehen, wie bei den Linien, wo aber auch der Begriff von Richtung ein ganz verschiedener ist, daß man stets dieselbe Flächenrichtung im Raume erhält, ob man die Größe $\sqrt{Y^2+Z^2}$ überall positiv oder überall negativ nehme; es wird nämlich in beiden Fällen eine Ebene er-

halten, welche ihre Oberfläche mit der ursprünglich darauf errichteten Normalen Ein und denselben Punkten von Z, Z', Y', Y, X, X' zugekehrt, oder deren Normale mit denselben Axen von OZ, OZ', OY', OY, OY, OX' einen spitzen Winkel bildet.

§. 150. Die arithmetischen Grundoperationen an den ihrer Größe und Richtung nach dargestellten Flächen.

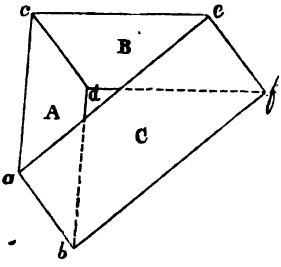
Wenn man sich die verschiedenen Flächengrößen nach ihren Beziehungen zu der positiven primären Einheit, aus welcher sie durch Quantitäts- und Richtungsveränderung gesetzmäßig entstanden sind, wie die geometrischen Repräsentanten des abstrakten Zahlensystemes vorstellt, wie Dies in den früheren Abschnitten auch mit den Linien geschehen ist; so kann man mit denselben eben die arithmetischen Operationen vornehmen, welchen die abstrakten Zahlen unterworfen werden, da diese Operationen Nichts weiter verlangen, als eine Veränderung der ihnen unterzogenen Größen nach den Prinzipien, welche die Bildung der einzelnen Glieder jenes allgemeinen Systemes charakterisiren.

Man wird zwei Flächen addiren, subtrahiren, miteinander multipliziren und dividiren und eine jede Fläche potenziiren können. Die Resultate werden ihrer Art nach natürlich immer wieder Flächen bleiben, und die spezielle Ausführung jener einzelnen Operationen ergibt sich leicht aus den Grundsätzen, nach welchen die allgemeinen Ausdrücke (23), (24) und (25) für eine beliebige Fläche aus der Flächeneinheit durch die Begriffe der Addition, Multiplikation u. s. w. erzeugt sind.

Mit Bezugnahme auf die Paragraphe (107), (108) und (109) wird hier nur noch in der Kürze folgendes bemerkt:

a) **Addition der Flächen.** Ihr Prinzip ist Fortbildung der Einen Fläche (A) in der Richtung und um die Quantität einer anderen (B). Hätte nun die erste Fläche (A) eine ganz willkürliche Begränzung, in welcher sich jedoch eine einzige gerade Linie befände, die der Durchschnittslinie der beiden Ebenen von (A) und (B) parallel wäre, so könnte man sich durch diese Linie eine Ebene parallel zu (B) gelegt denken und in dieser Ebene an jene Linie eine Fläche (B) von ganz beliebiger Form tragen, deren Quantität $B_1 = B$ wäre. Dächte man sich hierauf durch die übrige

lineare Begränzug der beiden Figuren (A) und (B_1), welche nicht schon in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie läge, eine Fläche (C) gelegt, die im Allgemeinen gekrümmt oder doch gebrochen sein würde; so müßte die Letztere ihrer Quantität und zugleich der Richtung ihrer einzelnen Elemente nach die Summe (A)+(B) darstellen. Soll nun diese Fläche (C) wiederum eine einzige Ebene sein; so ist es erforderlich, daß die beiden Summanden (A) und (B) nicht in willkürlicher Form gegeben seien. Vielmehr hat man, wenn *cd* die gemeinschaftliche Durchschnittsfläche der Ebene von (A) und (B) ist, in dieser Linie eine beliebige Länge, z. B. *cd*, anzunehmen, alsdann



sowol in der Ebene von A, wie in der von B zwei beliebige Parallelen durch die Punkte *c* und *d* zu ziehen und die beiden Flächen A und B zwischen diesen Parallelen als die Parallelogramme *cdba* = A und *cdfe* = B dazustellen. Denkt man sich hierauf durch die einander gleichen und parallelen Linien *ab* und *ef* das dritte Parallelogramm *abfe* gelegt; so wird dasselbe = C sein und die Summe

$$(C) = (A) + (B)$$

geometrisch darstellen.

Man erkennt leicht, daß es ganz willkürlich ist, welche Richtungen man den Parallelen *ca*, *db* und *ce*, *df* resp. in den Ebenen von (A) und (B) gibt. Wenn *cdba* = A und *cdfe* = B sein soll; so werden die perpendikularen Abstände der Seiten *ab* und *cd*, sowie der Seiten *ef* und *cd* und demnach der perpendikulare Abstand der Seiten *ab* und *ef* des Parallelogrammes *abfe* = C und mithin auch dessen Inhalt immer konstant bleiben.

Ebenso zeigt es sich, daß es gleichgültig ist, wie lang man die Seite *cd* in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der Ebenen von (A) und (B) annehme; das Parallelogramm *abfe* wird stets denselben Flächeninhalt und dieselbe Richtung im Raume behalten.

Hinsichtlich der Richtungen von (A), (B) und (C) ist noch zu bemerken, daß wenn man sich ihre Ebenen als materiell denkt,

auf deren Einer Seite [illegible] die Flächen (A) [illegible] diese Flächen [illegible] in der [illegible] eine solche Lage [illegible] müssen, daß [illegible] einander decken kann, wenn man die Eine oder die [illegible] nach dieser oder jener Seite um die Linie *cd* [illegible] Die Flächen A und B [illegible] entweder [illegible] vorderen oder beide auf den hinteren Seiten der Ebene *adfe*. Die Summe (C), welche alsdann auch entw[illegible] vorderen oder der hinteren Fläche der Ebene *abfc* [illegible] immer eine solche Lage haben, daß wenn ihre Eb[illegible] Kante *ab* oder *cf* gedreht wird, dieselbe nicht auf (A) und (B) niederfallen kann.

Wenn man sich den von den drei Ebenen *abdc*, *abfe* begränzten Raum als abgeschlossen vorstellt; so w[illegible] weder die Flächen (A) und (B) innerhalb und (C) [illegible] oder (A) und (B) außerhalb und (C) innerhalb desselb[illegible] Denkt man sich auf der entgegengesetzten Seite der E[illegible] (C) eine andere Fläche, deren Größe = C ist, welche a[illegible] — (C) dargestellt werden würde; so folgt, weil (C) + [illegible] = 0 und (A) — (B) = (C) ist, daß die Summe der dre[illegible] halb oder außerhalb des vorhin erwähnten Raumes li[illegible] Seitenflächen, welche Parallelogramme bilden, gleich n[illegible] Zieht man auch die beiden dreieckigen Flächen *ace* und *b*[illegible] in Betracht, welche der Größe nach gleich und der Richtung entgegengesetzt sind, wenn sie beide innerhalb oder beide auß[illegible] des Prismas *af* liegen; so folgt ferner, daß die Summe [illegible] inneren oder äußeren Begränzungsflächen des Prismas *bcf* [illegible] null sei.

Wenn die Addition zweier Flächen arithmetisch vollz[illegible] werden soll; so geschieht Dies, wie bei den Linien, wenn die[illegible] den mit Hülfe des abgekürzten Richtungskoeffizienten, also [illegible] die Formel (24) oder (25) gegeben sind, indem man die Pro[illegible] tionen auf die primäre, sekundäre und tertiäre Ebene resp. [illegible] dirt. Diese Operation stimmt nicht allein mit der vorstehende[illegible] geometrischen Konstruktion vollkommen überein; sie lehrt sogar [illegible] Größe und Richtung der Summe (C) finden, ohne daß man [illegible] thig hat, die Summanden (A) und (B) zuvor in Parallelogramme von der vorbeschriebenen Art zu verwandeln.

Es stellt sich hierdurch auch leicht die Richtigkeit des allgemeinen Satzes heraus, daß die Summe aller inneren oder äußeren Begränzungsflächen irgend eines von ebenen oder krummen Flächen ringsum eingeschlossenen Raumes gleich null sei, oder daß die Summe einer beliebigen Anzahl äußerer Begränzungsflächen gleich der Summe der übrigen inneren Begränzungsflächen, und umgekehrt, sei.

b) Bei der Subtraktion der Fläche (B) von (A) hat man (B) negativ zu nehmen, also als auf der entgegengesetzten Seite der Ebene liegend anzusehen und zu (A) nach den obigen Vorschriften zu addiren. Arithmetisch entspricht Dies einer Subtraktion der Projektionen der Fläche (B) von denen der Fläche (A).

c) Bei der Multiplikation der Fläche (A) mit (B) vermehrt sich die Quantität A in demselben Verhältnisse, wie B zur Flächeneinheit steht, außerdem addirt sich resp. der Deklinations- und Inklinationswinkel von (B) zu dem gleichnamigen Winkel von (A). Arithmetisch wird diese Operation durch eine wirkliche Multiplikation der mit Hülfe des vollständigen Richtungskoeffizienten, also in der Form des Ausdruckes (23) gegebenen Flächen ausgeführt.

d) Bei der Division findet wirkliche Theilung der Quantität des Dividends durch die des Divisors und Subtraktion der Deklinations- und Inklinationswinkel, wie bei den geraden Linien, statt. Arithmetisch werden die Ausdrücke dieser Flächen in Form der Gleichung (23) nach bekannten Regeln dividirt.

e) Der Begriff der Potenziirung entspringt aus dem der mehrfach mit demselben Faktor wiederholten Multiplikation; man findet hier bei den Flächen sowol für die Potenziirung zu ganzen, wie für die zu gebrochenen Exponenten oder für die Wurzelausziehung Regeln, welche denen ganz analog sind, die in §. 109 für diese Operation an geraden Linien näher erörtert sind. Es findet im Allgemeinen eine eigentliche Potenziirung der Quantität und eine Multiplikation (resp. Division) des Deklinations- und Inklinationswinkels durch den Exponenten statt.

auf deren Einer Seite resp. die Flächen (A) und (B) liegen, diese Flächen bei ihrer Aneinandertragung in der Linie *cd* immer eine solche Lage gegeneinander erhalten müssen, daß man sie aufeinander decken kann, wenn man die Eine oder die andere Ebene nach dieser oder jener Seite um die Linie *cd* als Axe drehet. Die Flächen (A) und (B) liegen also entweder beide auf den vorderen oder beide auf den hinteren Seiten der Ebenen *abdc* und *cdfe*. Die Summe (C), welche alsdann auch entweder auf der vorderen oder der hinteren Fläche der Ebene *abfc* liegt, wird immer eine solche Lage haben, daß wenn ihre Ebene um die Kante *ab* oder *ef* gedrehet wird, dieselbe nicht auf die Fläche (A) und (B) niederfallen kann.

Wenn man sich den von den drei Ebenen *abdc*, *cdfe* und *abfe* begränzten Raum als abgeschlossen vorstellt; so werden entweder die Flächen (A) und (B) innerhalb und (C) außerhalb oder (A) und (B) außerhalb und (C) innerhalb desselben liegen. Denkt man sich auf der entgegengesetzten Seite der Ebene von (C) eine andere Fläche, deren Größe $= C$ ist, welche also durch $-(C)$ dargestellt werden würde; so folgt, weil $(C)+[-(C)] = 0$ und $(A)+(B)=(C)$ ist, daß die Summe der drei innerhalb oder außerhalb des vorhin erwähnten Raumes liegenden Seitenflächen, welche Parallelogramme bilden, gleich null ist. Zieht man auch die beiden dreieckigen Flächen *ace* und *bdf* mit in Betracht, welche der Größe nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt sind, wenn sie beide innerhalb oder beide außerhalb des Prismas *af* liegen; so folgt ferner, daß die Summe aller inneren oder äußeren Begränzungsflächen des Prismas *bcf* gleich null sei.

Wenn die Addition zweier Flächen arithmetisch vollzogen werden soll; so geschieht Dies, wie bei den Linien, wenn dieselben mit Hülfe des abgekürzten Richtungskoeffizienten, also durch die Formel (24) oder (25) gegeben sind, indem man die Projektionen auf die primäre, sekundäre und tertiäre Ebene resp. addirt. Diese Operation stimmt nicht allein mit der vorstehenden geometrischen Konstruktion vollkommen überein; sie lehrt sogar die Größe und Richtung der Summe (C) finden, ohne daß man nöthig hat, die Summanden (A) und (B) zuvor in Parallelogramme von der vorbeschriebenen Art zu verwandeln.

Es stellt sich hierdurch auch leicht die Richtigkeit des allgemeinen Satzes heraus, daß die Summe aller inneren oder äußeren Begränzungsflächen irgend eines von ebenen oder krummen Flächen ringsum eingeschlossenen Raumes gleich null sei, oder daß die Summe einer beliebigen Anzahl äußerer Begränzungsflächen gleich der Summe der übrigen inneren Begränzungsflächen, und umgekehrt, sei.

b) Bei der Subtraktion der Fläche (B) von (A) hat man (B) negativ zu nehmen, also als auf der entgegengesetzten Seite ihrer Ebene liegend anzusehen und zu (A) nach den obigen Vorschriften zu addiren. Arithmetisch entspricht Dies einer Subtraktion der Projektionen der Fläche (B) von denen der Fläche (A).

c) Bei der Multiplikation der Fläche (A) mit (B) vermehrt sich die Quantität A in demselben Verhältnisse, wie B zur Flächeneinheit steht, außerdem addirt sich resp. der Deklinations- und Inklinationswinkel von (B) zu dem gleichnamigen Winkel von (A). Arithmetisch wird diese Operation durch eine wirkliche Multiplikation der mit Hülfe des vollständigen Richtungskoeffizienten, also in der Form des Ausdruckes (23) gegebenen Flächen ausgeführt.

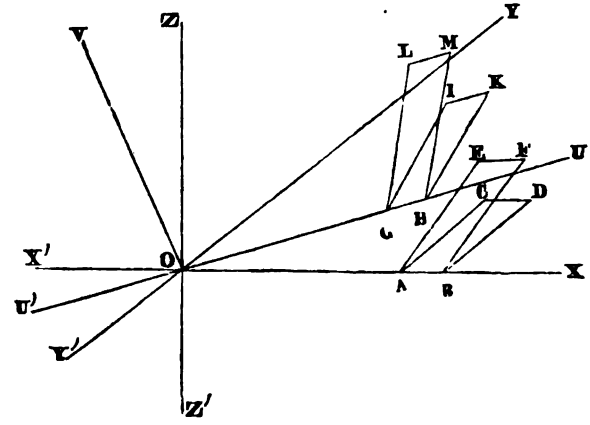
d) Bei der Division findet wirkliche Theilung der Quantität des Dividends durch die des Divisors und Subtraktion der Deklinations- und Inklinationswinkel, wie bei den geraden Linien, statt. Arithmetisch werden die Ausdrücke dieser Flächen in Form der Gleichung (23) nach bekannten Regeln dividirt.

e) Der Begriff der Potenziirung entspringt aus dem der mehrfach mit demselben Faktor wiederholten Multiplikation; man findet hier bei den Flächen sowol für die Potenziirung zu ganzen, wie für die zu gebrochenen Exponenten oder für die Wurzelausziehung Regeln, welche denen ganz analog sind, die in §. 109 für diese Operation an geraden Linien näher erörtert sind. Es findet im Allgemeinen eine eigentliche Potenziirung der Quantität und eine Multiplikation (resp. Division) des Deklinations- und Inklinationswinkels durch den Exponenten statt.

Einige Anwendungen der vorſtehenden Prinzipien auf die Geometrie der drei Dimenſionen.

§. 151. Beſtimmung der Größe und Richtung einer ebenen Fläche durch ihre Projektionen.

Wenn die Richtung irgend einer ebenen Figur vom abſoluten Flächeninhalte A dadurch erzeugt gedacht wird, daß ſich die poſitive, alſo die obere Seite der primären Ebene XY, auf welcher



OZ normal ſteht, erſt in der Richtung YZ um die Axe X'X um den Winkel α, alsdann aber in der Richtung XY um die Axe Z'Z um den Winkel φ gedrehet hat; ſo wird jene Fläche der Größe und Richtung nach durch

$$(A)=A(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{\div 1})(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1}) \quad \ldots.(30)$$

oder mit Anwendung des abgekürzten Richtungskoeffizienten durch

$$(A)=A\cos\alpha+A\sin\alpha\cos\varphi.\sqrt{-1}+A\sin\alpha\sin\varphi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \ldots(31)$$

dargeſtellt. $A\cos\alpha$, $A\sin\alpha\cos\varphi$, $A\sin\alpha\sin\varphi$ ſind hierin die drei Projektionen von A reſp. auf die primäre Ebene XY, die ſekundäre Ebene XZ und die tertiäre Ebene YZ. Bezeichnet man dieſelben reſp. mit X, Y, Z; ſo hat man

$$(A)=X+Y\sqrt{-1}+Z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(32)$$

Die Projektion X wird poſitiv ſein, wenn ſie, als auf der

oberen Seite der Ebene XY liegend, angesehen werden muß, also wenn die Fläche (A) im Raume in perpendikularer Richtung zu dieser Ebene sich dem Punkte Z zukehrt, oder wenn die Normale auf (A) (welche in ihrer ursprünglichen Lage mit OZ zusammenfiel) mit der Halbaxe OZ einen spitzen Winkel einschließt; X ist negativ, wenn sie auf der unteren Seite von YX liegt oder wenn die Normale auf (A) mit OZ' einen spitzen, also mit OZ einen stumpfen Winkel einschließt. Die Projektion Y ist positiv, wenn sie auf der vorderen Seite der Ebene XZ liegt, wenn also die Normale auf (A) mit OY' einen spitzen Winkel bildet; sie ist negativ, wenn sie auf der hinteren Seite von XZ liegt, wenn also die Normale auf (A) mit OY einen spitzen oder mit OY' einen stumpfen Winkel einschließt. Die Projektion Z endlich ist positiv, wenn sie auf der rechten Seite der Ebene YZ liegt, wenn sich also die Normale auf (A) gegen OX unter einem spitzen Winkel neigt; sie ist negativ, wenn sie auf der linken Seite von YZ liegt, wenn also die Normale auf (A) mit OX' einen spitzen oder mit OX einen stumpfen Winkel bildet.

Wegen der Gleichungen (31) und (32) hat man die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} X &= A\cos\alpha, \\ Y &= A\sin\alpha\cos\varphi, \\ Z &= A\sin\alpha\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(33)$$

aus welchen

$$A = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad \ldots\ldots(34)$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{A} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \qquad \ldots\ldots(35)$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{Z}{Y} \qquad \ldots\ldots(36)$$

folgt. Wenn man aus den letzten beiden Gleichungen die Werthe der Winkel α und φ bestimmen will; so hat man dabei auf die Ausdrücke für $\sin\alpha$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ aus den Gleichungen (28) und (29) Rücksicht zu nehmen. Wie in §. 148 bemerkt und in §. 106 bei den Linien näher erläutert ist, gibt es für α und φ immer

je zwei Werthe, welche den Beziehungen (33) vollkommen entsprechen, welche aber auch die Lage der Fläche (A) im Raume ganz übereinstimmend angeben.

Nimmt man jetzt die Ebene XZ zur primären, ZY zur sekundären und YX zur tertiären Ebene an, sodaß die positiven Seiten dieser Ebenen dieselben sind, welche früher die positiven an ihren waren, nämlich die, auf welchen resp. OY', OX und OZ normal stehen, bezeichnet unter dieser Vertauschung der drei Ebenen mit β die Deklination und mit ψ die Inklination der Fläche (A), indem man die Drehung um die Axe Z'Z behuf Erzeugung des Deklinationswinkels β in der Richtung XY und die Drehung um die Axe Y'Y behuf Erzeugung des Inklinationswinkels ψ in der Richtung XZ oder ZX' annimmt; so wird β der Neigungswinkel der Fläche (A) gegen die Ebene XZ und ψ der Winkel sein, unter welchem sich die Durchschnittslinie der Ebene von (A) mit der Ebene XZ gegen die Axe OZ in der Richtung von Z gegen X' neigt, und man hat

$$(A)=A\cos\beta+A\sin\beta\cos\psi\sqrt{-1}+A\sin\beta\sin\psi\sqrt{\div 1}\sqrt{-1},\ldots.(37)$$

aber auch

$$(A)=Y+Z\sqrt{-1}+X\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}; \qquad \ldots.(38)$$

mithin

$$\cos\beta=\frac{Y}{A}=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \qquad \ldots.(39)$$

und

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{X}{Z} \qquad \ldots.(40)$$

Nimmt man endlich ZY zur primären, YX zur sekundären und XZ zur tertiären Ebene an, sodaß die positiven Seiten dieser Ebenen die früheren bleiben, bezeichnet die Deklination und Inklination der Fläche (A) für dieses neue System resp. mit γ und χ, indem man die Drehung um die Axe Y'Y behuf Erzeugung der Ersteren in der Richtung XZ oder ZX' und die Drehung um die Axe X'X zur Erzeugung der Letzteren in der Richtung YZ annimmt; so bildet γ den Neigungswinkel der Fläche (A) gegen die Ebene YZ und χ den Winkel, unter welchem sich die Durchschnittslinie der Ebene von (A) mit der Ebene YZ

gegen die Axe OY in der Richtung von Y gegen Z neigt, und man hat

$$(A)=A\cos\gamma+A\sin\gamma\cos\chi\sqrt{-1}+A\sin\gamma\sin\chi\sqrt{+1}\sqrt{-1} \quad \ldots.(41)$$

aber auch

$$(A)=Z+X\sqrt{-1}+Y\sqrt{+1}\sqrt{-1}; \quad \ldots.(42)$$

mithin

$$\cos\gamma=\frac{Z}{A}=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \quad \ldots.(43)$$

und

$$\operatorname{tang}\chi=\frac{Y}{X} \quad \ldots.(44)$$

Zwischen den Winkeln α, β, γ, φ, ψ, χ finden offenbar auch die Beziehungen (42), (43), (47) bis (50) des §s 110 statt; man hat nämlich

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \quad \ldots.(45)$$

$$\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi\operatorname{tang}\chi=1, \quad \ldots.(46)$$

$$\cos\beta=\sin\alpha\cos\varphi, \quad \ldots.(47)$$

$$\cos\gamma=\sin\alpha\sin\varphi, \quad \ldots.(48)$$

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha\sin\varphi}, \quad \ldots.(49)$$

$$\operatorname{tang}\chi=\operatorname{tang}\alpha\cos\varphi, \quad \ldots.(50)$$

Man erkennt leicht, daß die Winkel α, β, γ auch die Winkel darstellen, welche die Normale auf der Fläche (A) resp. mit den Axen OZ, OY', OX einschließt.

§. 152. **Bestimmung der Richtung einer Ebene und deren Normalen, wenn die Lage ihrer verschiedenen Punkte oder deren lineare Vektorradien durch die Gleichungen des vierten Abschnittes, §. 125 ff, gegeben sind.**

Man denke sich eine Ebene, welche nicht durch den Nullpunkt

eines linearen rechtwinkligen Koordinatensystemes geht, in ihren gegenseitigen Durchschnitten mit den drei Koordinatenebenen XY, XZ und YZ. Die Durchschnittslinien mit diesen drei Ebenen werden ein Dreieck formiren, dessen absolute Quantität, als Flächengröße betrachtet, $=A$ und dessen Projektionen resp. auf die Ebenen XY, XZ und YZ resp. X, Y, Z seien. Es erhellet, daß die Projektion X durch das rechtwinklige Dreieck dargestellt wird, welches zwischen den Aren X'X, YY' und der Durchschnittslinie der gegebenen Ebene mit der Ebene XY oder XY' liegt. Ebenso ist die Projektion Y durch das rechtwinklige Dreieck dargestellt, welches zwischen den Aren X'X, Z'Z und der Durchschnittslinie mit der Ebene XZ liegt. Endlich ist die Projektion Z gleich dem rechtwinkligen Dreiecke zwischen den Aren YY', Z'Z und der Durchschnittslinie mit der Ebene YZ oder Y'Z.

Bezeichnet man nun die Abstände vom Nullpunkte O, in welchem die gegebene Ebene resp. die Aren XX', Y'Y, ZZ' durchschneidet mit x_1, y_1, z_1, wobei die Richtungen OX, OY', OZ als die positiven anzusehen sind, welche die Richtungen der Normalen auf den positiven Seiten der tertiären, sekundären und primären Ebene YZ, XZ und XY bezeichnen; so hat man offenbar

$$X=\tfrac{1}{2}x_1y_1,\quad Y=\tfrac{1}{2}x_1z_1,\quad Z=\tfrac{1}{2}y_1z_1 \qquad \ldots.(51)$$

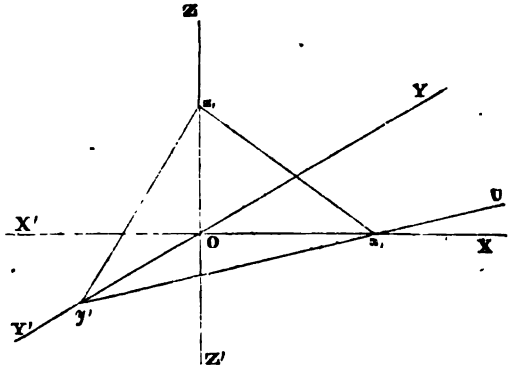
Substituirt man diese Werthe in die Formeln (34), (35), (39), (43), (36), (40) und (44); so kommt

$$A=\tfrac{1}{2}\sqrt{x_1^2y_1^2+x_1^2z_1^2+y_1^2z_1^2}, \qquad \ldots.(52)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\frac{1}{2}x_1y_1}{A}=\frac{x_1y_1}{\sqrt{x_1^2y_1^2+x_1^2z_1^2+y_1^2z_1^2}},\\ \cos\beta&=\frac{\frac{1}{2}x_1z_1}{A}=\frac{x_1z_1}{\sqrt{x_1^2y_1^2+x_1^2z_1^2+y_1^2z_1^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{\frac{1}{2}y_1z_1}{A}=\frac{y_1z_1}{\sqrt{x_1^2y_1^2+x_1^2z_1^2+y_1^2z_1^2}},\end{aligned}\right\} \qquad \ldots.(53)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\varphi &= \frac{y_1}{x_1}, \\ \operatorname{tang}\psi &= \frac{x_1}{z_1}, \\ \operatorname{tang}\chi &= \frac{z_1}{y_1}. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(54)$$

Da die Begriffe, welche wir uns nach allem Vorhergehenden von der positiven und negativen Richtung einer Linie und der positiven und negativen Richtung einer Fläche machen, ganz verschiedener Natur sind, und diese Begriffe ganz und gar nicht in einer solchen Beziehung zueinander stehen, daß wenn die absolute Quantität einer Fläche, z. B. der Projektion $X=\frac{1}{2}x_1y_1$, durch die linearen Dimensionen ihrer Begränzung bestimmt und diese Dimensionen auf irgend ein lineares Koordinatensystem bezogen sind, ebenfalls die Richtung jener Fläche durch dasjenige Zeichen dargestellt würde, welches man aus der Funktion $\frac{1}{2}x_1y_1$ erhält, sobald man darin den linearen Größen x_1 und y_1 diejenigen Zeichen gibt, welche ihnen, als Linien, zukommen; so ist noch nachzuweisen, ob und in welcher Weise die obigen Gleichungen (51) auch dann unbedingte Richtigkeit haben, wenn man dadurch die Größen X, Y, Z nicht bloß ihrer absoluten Quantität, sondern auch ihrer Richtung nach vermittelst der linearen Koordinaten x_1, y_1, z_1, denen ihr Zeichen nach den verschiedenen Richtungen vom Punkte O aus verliehen ist, darstellt.



Zu diesem Behufe fasse man die von den Axen X'X, Y'Y, Z'Z gebildeten 8 rechtwinkligen um den Punkt O herumliegenden körperlichen Ecken ins Auge, von denen eine jede durch eine dreieckige Basis, deren Inhalt =A ist, als Pyramyde ringsum begränzt ist, sodaß diese 8 dreieckigen Flächen A ein Oktaeder bilden. Nun bezeichne man die vorstehenden Ecken mit den Grundflächen A folgendermaaßen:

1ste Ecke ZY'X mit der Basis A_1 (=$z_1 y_1 x_1$ in der Figur),
2te " ZXY " " " A_2,
3te " ZYX' " " " A_3,
4te " ZX'Y' " " " A_4,
5te " Z'Y'X " " " A_5,
6te " Z'XY " " " A_6,
7te " Z'YX' " " " A_7,
8te " Z'Y'Y' " " " A_8.

Da OX, OY', OZ die positiven Richtungen sind, nach welchen die Koordinaten x_1, y_1, z_1, als Linien, gemessen werden sollen; so würde man, wenn die Projektionen X, Y, Z der Flächen A_1, A_2, A_3 ... durch die Gleichungen (51) auch ihrer Richtung, als Flächen, nach dargestellt werden sollten, folgende Beziehungen haben:

für die 1ste Ecke $+x_1, +y_1, +z_1$; also auch $+X, +Y, +Z$,
2te " $+x_1, -y_1, +z_1$; " " $-X, +Y, -Z$,
3te " $-x_1, -y_1, +z_1$; " " $+X, -Y, -Z$,
4te " $-x_1, +y_1, +z_1$; " " $-X, -Y, +Z$,
5te " $+x_1, +y_1, -z_1$; " " $+X, -Y, -Z$,
6te " $+x_1, -y_1, -z_1$; " " $-X, -Y, +Z$,
7te " $-x_1, -y_1, -z_1$; " " $+X, +Y, +Z$,
8te " $-x_1, +y_1, -z_1$; " " $-X, +Y, -Z$.

Diese Werthe der Projektionen X, Y, Z sind in der That dazu geeignet, die Richtungen der Flächen A_1, A_2, A_3 ... im Raume zu bestimmen, jedoch so,

alswenn A_1 außerhalb des fraglichen Oktaeders läge,

" A_2 innerhalb " " " "

" A_3 außerhalb " " " "

" A_4 innerhalb " " " "

" A_5 innerhalb " " " "

" A_6 außerhalb " " " "

" A_7 innerhalb " " " "

" A_8 außerhalb " " " "

ſodaß auf dieſen Seiten der Flächen A_1, A_2, A_3 . . . diejenige Normale errichtet gedacht wird, welche anfänglich mit der Are OZ zuſammenfiel, als dieſe Flächen in der primären Ebene XY lagen und durch die den Flächen eigene Deklination und Inklination in die neuen Lagen gebracht wurden. Man erkennt, daß die Normalen auf den Flächen A_1 und A_7, A_2 und A_8, A_3 und A_5, A_4 und A_6 nicht entgegengeſetzte, ſondern genau dieſelbe Richtung haben werden.

Um das Prinzip, welches ſich in den vorſtehenden Beziehungen ausſpricht, beſſer zu durchſchauen; ſo findet man leicht, daß die einzelnen Flächen A_2, A_3, . . . A_8 aus der erſten in der Ecke ZY'X auf der vorderen Seite oder außerhalb des Oktaeders liegenden Fläche A_1 durch folgende Bewegungen ſukzeſſive erhalten werden:

Der Punkt y_1 rückt gegen den Nullpunkt ein und überſchreitet denſelben in der Richtung Y'Y, ſodaß y_1 in $-y_1$ übergeht, während die übrigen beiden Punkte x_1 und z_1 beibehalten werden. Hierdurch kommt die Seite der Ebene (A), auf welcher vorher die Fläche A_1 lag, innerhalb des Oktaeders zu liegen und bildet die Fläche A_2. Jetzt werden die Koordinaten z_1 und $-y_1$ beibehalten, und der Punkt x_1 rückt gegen den Nullpunkt ein, überſchreitet denſelben in der Richtung XX', ſodaß die Koordinate x_1 in $-x_1$ übergeht. Hierdurch kommt die Fläche A_2 wieder außerhalb des Oktaeders zu liegen und bildet die Fläche A_3, u. ſ. w.

Nachdem man hierdurch in den Stand geſetzt iſt, aus den Zeichen, welche die Projektionen X, Y, Z vermöge der Formeln $\frac{1}{2}x_1y_1$, $\frac{1}{2}x_1z_1$, $\frac{1}{2}y_1z_1$ annehmen, auf die Richtung der Fläche

(A) oder deren Normalen zu schließen; so sei für die positiven Koordinatenrichtungen OX, OY′, OZ allgemein

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+[c+(x-a)f+(y-b)g]\sqrt{-1}\sqrt{-1},$$

woraus

$$z=c+(x-a)f+(y-b)g \qquad \ldots.(55)$$

folgt, die Gleichung für den Vektorradius irgend eines Punktes der gegebenen Ebene (s. §. 127). Es leuchtet ein, daß die obigen Größen x_1, y_1, z_1 aus der vorstehenden Gleichung (55) als die Werthe von x, y, z erhalten werden, wenn man darin erst $y=0$, $z=0$, alsdann $x=0$, $z=0$ und endlich $x=0$, $y=0$ setzt. Dies ergibt

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{c-af-bg}{f},\\ y_1 &= -\frac{c-af-bg}{g},\\ z_1 &= \quad c-af-bg. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots.(56)$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (51) bis (54) und dividirt Zähler und Nenner der Gleichungen (53) durch den jedenfalls positiven Faktor $(c-af-bg)^2$ und Zähler und Nenner der Gleichungen (54) durch den Faktor $c-af-bg$; so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{X} &= \quad \tfrac{1}{2}\frac{(c-af-bg)^2}{fg},\\ \mathrm{Y} &= -\tfrac{1}{2}\frac{(c-af-bg)^2}{f},\\ \mathrm{Z} &= -\tfrac{1}{2}\frac{(c-af-bg)^2}{g}, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots.(57)$$

$$\mathrm{A}=\tfrac{1}{2}(c-af-bg)^2\sqrt{\frac{1}{f^2g^2}+\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}} \qquad \ldots.(58)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\frac{1}{fg}}{\sqrt{\frac{1}{f^2g^2}+\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}}},\\ \cos\beta &= \frac{-\frac{1}{f}}{\sqrt{\frac{1}{f^2g^2}+\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}}},\\ \cos\gamma &= \frac{-\frac{1}{g}}{\sqrt{\frac{1}{f^2g^2}+\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}}},\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(59)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\varphi &= \frac{f}{g},\\ \operatorname{tang}\psi &= -\frac{1}{f},\\ \operatorname{tang}\chi &= -g.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(60)$$

In den Gleichungen (58) und (59) ist die Wurzelgröße durchaus positiv zu nehmen, da A eine absolute Quantität bezeichnet. Es wird daher gestattet sein, den Faktor vor dieser Wurzelgröße durch eine positive Zahl zu dividiren und gleichzeitig den Werth unter dem Wurzelzeichen mit dem Quadrate jener Zahl zu multipliziren. Will man aber den Faktor vor dem Wurzelzeichen durch eine negative Zahl dividiren und den Werth unter dem Wurzelzeichen mit dem Quadrate dieser Zahl multipliziren; so hat man das fragliche Wurzelzeichen negativ zu nehmen. Demnach kann man statt der Gleichungen (58) und (59) auch setzen

$$A = \pm\tfrac{1}{2}\frac{(c-af-bg)^2}{fg}\sqrt{1+f^2+g^2}, \quad \ldots\ldots(61)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1}{\pm\sqrt{1+f^2+g^2}},\\ \cos\beta &= \frac{-g}{\pm\sqrt{1+f^2+g^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{-f}{\pm\sqrt{1+f^2+g^2}},\end{aligned}\right\} \quad \ldots(62)$$

worin das Zeichen + oder — zu nehmen ist, jenachdem das Produkt fg positiv oder negativ ist.

Die Werthe für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aus den Gleichungen (62), wodurch die Neigungswinkel der Normalen auf der gegebenen Ebene resp. gegen die Axen OZ, OY', OX bestimmt sind, entsprechen den Werthen für $\cos\nu$, $\cos\lambda$, $\cos\mu$ aus den Gleichungen (154) des §s 127.

Der Werth von $\tang\varphi$ aus den Gleichungen (60) ist, der Quantität nach, dem Werthe von $\tang\chi$ aus den Gleichungen (155) des §s 127 gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt. Dies stimmt mit den Prinzipien überein, nach welchen im gegenwärtigen und im dortigen Abschnitte die Lage der Fläche (A) $= (x_1 y_1 z_1)$ aus der Lage der Ebene XY erzeugt ist. Hier wird durch φ der Inklinationswinkel Xx_1U dargestellt und dort der Winkel Xx_1y_1, welcher den Nebenwinkel des vorstehenden bildet.

Da aus den Gleichungen (59), (60) und (62) die Größen a, b, c, welche sich auf die parallele Verrückung der gegebenen Ebenen vom Nullpunkte beziehen, verschwunden sind; so folgt, daß dieselben von dieser Verrückung unabhängig sind, mithin auch dann noch Gültigkeit behalten werden, wenn diese Ebene durch den Nullpunkt O selbst geht, in welchem Fall $a=0$, $b=0$, $c=0$, und demnach auch $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ und $A=0$ wird.

Die vorstehende Behauptung läßt sich noch auf nachfolgende allgemeinere Weise direkt darthun. Man betrachte eine Ebene von der Lage der ersten Grundfläche der obigen 8 Pyramiden, bei welcher die Normale mit einer jeden der drei Axen OX, OY', OZ einen spitzen Winkel einschließt. Die Gleichung dieser Ebene in Beziehung zu den ebenerwähnten drei Koordinatenrichtungen sei allgemein

$$(\varrho) = x + y\sqrt{1} + z\sqrt{1}\sqrt{1},$$

worin

$$z = F(x, y) \qquad \ldots (63)$$

ist. Es kommt uns jetzt darauf an, die Größe und Richtung eines Stückes dieser Ebene kennen zu lernen, welches die oberste schiefe Fläche eines Prismas bildet, das auf der Ebene XY' perpendikular steht und dessen Seiten mit den Ebenen XZ und Y'Z

parallel ſind. Der Flächeninhalt dieſes Stückes, welches ein Parallelogramm bilden wird, ſei $=A$. Wenn nun P der Eckpunkt dieſes Parallelogrammes iſt, welcher der Axe OZ am nächſten liegt, ferner Q der auf P folgende Eckpunkt in derjenigen Seitenfläche des erwähnten Prismas, welche mit XZ parallel iſt, ferner R der auf P folgende Eckpunkt des Parallelogrammes und S der vierte Eckpunkt, welcher mit P in derſelben mit Y'Z parallelen Seitenfläche des Prismas liegt; ſo wird P der höchſte, R der tiefſte Eckpunkt des Parallelogrammes PQRS ſein, und ein jeder der beiden Punkte Q und S wird tiefer liegen, als P, und höher, als R. Die Projektion von $A=PQRS$ auf die Ebene XY' ſei $X=P_1Q_1R_1S_1$, die auf die Ebene XZ ſei $Y=P_2Q_2R_2S_2$ und die auf die Ebene Y'Z ſei $Z=P_3Q_3R_3S_3$. Sind nun x, y, z die Koordinaten des Punktes P, alſo x, y die des Punktes P_1; ſo ſeien Δx und Δy beliebige Inkremente der beiden letzteren Koordinaten und demnach $x+\Delta x$ und y die Koordinaten des Punktes Q_1, $x+\Delta x$ und $y+\Delta y$ die des Punktes R_1, x und $y+\Delta y$ die des Punktes S_1; alsdann wird der Flächeninhalt der Projektion $P_1Q_1R_1S_1$

$$X=\Delta x\,\Delta y \qquad \ldots.(64)$$

ſein.

Man erkennt leicht, daß die Projektion $P_2Q_2R_2S_2$ auf die Ebene XZ ein Parallelogramm bildet, deſſen Seiten P_2S_2 und Q_2R_2 parallel zu der Axe OZ gleich dem Höhenunterſchiede der beiden Punkte P und S, alſo, da $z=F(x,y)$ iſt,

$$=F(x,y)-F(x,y+\Delta y)=-[F(x,y+\Delta y)-F(x,y)]$$

ſind, und deſſen Höhe $=\Delta x$ iſt. Bezeichnet man nun den negativen Werth der Seite P_2S_2 oder das Inkrement $F(x,y+\Delta y)-F(x,y)$ der Ordinate z, welches man erhält, wenn man in der Funktion für z die Größe y in $y+\Delta y$ übergehen läßt, während man x ungeändert läßt, und hiervon den früheren Werth z ſubtrahirt, durch

$$F(x,y+\Delta y)-F(x,y)=\frac{\Delta z}{\Delta y}\,\Delta y;$$

ſo hat man für den Flächeninhalt der Projektion Y

$$Y=-\Delta x\Delta y\frac{\Delta z}{\Delta y} \qquad \ldots.(65)$$

Die Projektion $P_2Q_2R_2S_2$ auf die Ebene Y'Z endlich bildet ebenfalls ein Parallelogramm, dessen Seite P_2Q_2 oder S_2R_2 in paralleler Richtung zur Axe OZ gleich dem Höhenunterschiede der beiden Punkte P und Q und dessen Höhe $=\Delta y$ ist. Setzt man daher, dem Vorstehenden analog,

$$P_2Q_2=F(x,y)-F(x+\Delta x,y)=-[F(x+\Delta x,y)-F(x,y)]$$
$$=-\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x;$$

so ergibt sich für die dritte Projektion Z

$$Z=-\Delta x\Delta y\frac{\Delta z}{\Delta x} \qquad \ldots.(66)$$

Substituirt man diese Werthe für X, Y, Z in die Formeln (34), (35), (39) und (43); so erhält man

$$A=\Delta x\Delta y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)^2}, \qquad \ldots.(67)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)^2}},\\ \cos\beta&=\frac{-\frac{\Delta z}{\Delta y}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{-\frac{\Delta z}{\Delta x}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)^2}},\end{aligned}\right\} \qquad \ldots.(68)$$

Wenn nun für irgend eine Ebene

$$z=c+(x-a)f+(y-b)g$$

ist; so findet man leicht

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x = f\Delta x \text{ oder } \frac{\Delta z}{\Delta x} = f \\ \text{und}\quad &\\ &\frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y = g\Delta y \text{ oder } \frac{\Delta z}{\Delta y} = g, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (69)$$

und durch Substitution dieser Werthe in die Gleichungen (68) die früheren Gleichungen (62). Die dortige Bedingung, daß man in den Formeln (62) das Zeichen + oder — zu nehmen habe, jenachdem das Produkt fg positiv oder negativ wäre, geht bei den Formeln (68) in die über, daß man darin das Zeichen + oder — zu nehmen habe, jenachdem das Produkt $\frac{\Delta z}{\Delta x}.\frac{\Delta z}{\Delta y}$ positiv oder negativ ist. Unter Beobachtung dieser Regel wird die Lage der Ebene oder die Richtung von deren Normalen so bestimmt, als wenn die Fläche A auf der Basis von Einer der früher betrachteten 8 Pyramiden und zwar auf Einer der oben näher bezeichneten Seiten läge.

§. 153. Richtung der Berührungsebene und der Normalen auf einer krummen Oberfläche.

Wenn aus der Gleichung für irgend eine krumme Oberfläche

$$z = \mathrm{F}(x, y) \quad \ldots\ldots (70)$$

folgt; so leuchtet ein, daß ein unendlich kleiner Theil PQRS derselben, dessen Projektion auf die Ebene XY von den unendlich kleinen Inkrementen dx und dy der Koordinaten x und y irgend eines Punktes P eingeschlossen ist und das Rechteck $\mathrm{P_1Q_1R_1S_1} = dx.dy$ bildet, als ein ebenes Parallelogramm anzusehen ist. Für die Koordinaten der vier Eckpunkte dieses Parallelogrammes wird man haben

für den Punkt P x, y, z,

" " " Q $x+dx$, y, $z+\frac{dz}{dx}dx$,

" " " S x, $y+dy$, $z+\frac{dz}{dy}dy$,

" " " R $x+dx$, $y+dy$, $z+\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$,

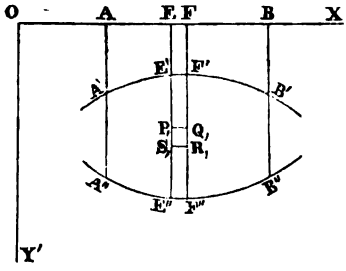
worin $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ resp. die partiellen Differenzialkoeffizienten der Funktion (70) in Beziehung zu den unabhängig Veränderlichen x und y bezeichnen. Denkt man sich die durch das vorstehende Parallelogramm bestimmte Ebene nach allen Seiten erweitert; so erhält man die Berührungsebene der gegebenen krummen Oberfläche im Punkte P. Assimilirt man nun dieses Parallelogramm PQRS mit dem gleichnamigen des vorhergehenden Paragraphs; so findet man, daß die Formeln (69) die Richtung der fraglichen Berührungsebene darstellen, sobald man darin $\frac{dz}{dx}$ für $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ und $\frac{dz}{dy}$ für $\frac{\Delta z}{\Delta y}$ substituirt. Dies ergibt

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},\\
\cos\beta &= \frac{-\frac{dz}{dy}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},\\
\cos\gamma &= \frac{-\frac{dz}{dx}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(71)$$

In diesen Formeln bezeichnen α, β, γ die Neigungswinkel der Berührungsebene resp. gegen die drei Ebenen XY, XZ, YZ in den bekannten oben näher bezeichneten Richtungen herum, oder auch die Neigungswinkel der Normalen auf der krummen Oberfläche im Punkte P resp. gegen die Axen OZ, OY′, OX. Es ist in denselben das Zeichen + oder − zu nehmen, jenachdem das Produkt $\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}$ positiv oder negativ ist, wenn man die Normale nur auf Einer Seite der Berührungsfläche und zwar auf derjenigen errichtet ansehen will, welche je nach der Lage dieser Fläche innerhalb oder außerhalb des im vorhergehenden Paragraphe näher bezeichneten Oktaeders liegt. Will man sich jedoch

die Normale auf beiden Seiten der Berührungsfläche verlängert denken; so werden die Gleichungen (71) immer denjenigen Theil der Normalen darstellen, welcher mit der Axe OZ einen spitzen Winkel α einschließt, sobald man darin nur das obere Zeichen + vor der Wurzelgröße beibehält. Man erkennt leicht die Übereinstimmung des Werthes für $\cos\alpha$ mit dem für $\cos\varphi$ aus §. 136 und auch der Werthe für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ resp. mit denen für $\cos\nu$, $\cos\mu$, $\cos\lambda$ aus §. 137.

§. 154. Bestimmung des Flächeninhaltes eines begränzten Theiles einer krummen Oberfläche aus den Dimensionen seiner Gränze, wenn die Fläche vermittelst rechtwinkliger Koordinaten dargestellt ist.



Substituirt man in Gleichung (67) resp. dx und dy für Δx und Δy, ferner die partiellen Differenzialkoeffizienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ für $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta z}{\Delta y}$; so erhält man für das Element dV des Flächeninhaltes der gegebenen krummen Oberfläche, welches sich in $P_1Q_1R_1S_1$ als ein Rechteck vom Inhalte $dx\,dy$ auf die Ebene XY' projizirt,

$$dV = dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \qquad \ldots\ldots(72)$$

Wird es nun gefordert, den Inhalt V desjenigen Theiles der krummen Oberfläche zu bestimmen, welcher sich auf die Ebene XY' in der Figur A'B'B''A'' projizirt, die oberwärts von der Kurve A'B', unterwärts von der Kurve A''B'', links und rechts von den zu OY' parallelen Linien A'A'' und B'B'' begränzt ist; so sei für die Kurve A'B', deren Ordinaten in der Richtung OY' wir durch y' darstellen,

$$y' = F_1(x) \qquad \ldots\ldots(73)$$

und für die Kurve A''B'', deren Ordinaten in der Richtung OY' durch y'' dargestellt werden,

$$y''=F_2(x); \qquad \ldots.(74)$$

außerdem sei $OA=x_1$ und $OB=x_2$.

Denkt man sich durch den Punkt P_1, dessen Koordinaten x und y sind, die Linie EE'' und durch den Punkt Q_1 die Linie FF'' parallel zu OY' gezogen; so wird der Flächeninhalt des Theiles der krummen Oberfläche, welcher sich auf $E'F'F''E''$ projizirt erhalten, wenn man in dem Ausdrucke (72) x als konstant ansieht, und alsdann die Summe aller Werthe nimmt, welche man daraus erhält, sobald man y von y' bis y'' variiren läßt. Dies ergibt

$$dx\int_{y'}^{y''}dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Nimmt man jetzt die Summe aller Werthe des letzteren Ausdruckes, welcher, nachdem man darin für y' und y'' ihre Werthe aus den Gleichungen (73) und (74) substituirt hat, nur eine Funktion der Veränderlichen x bildet, zwischen den Gränzen $x=x_1$ und $x=x_2$; so erhält man für den Inhalt des auf $A'B'B''A''$ projizirten Theiles der krummen Oberfläche

$$V=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y'}^{y''}dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \qquad \ldots.(75)$$

Wenn die Projektion $A'B'B''A''$ eine in sich selbst zusammenlaufende Kurve bildet; so werden natürlich die Linien AA'' und BB'', durch deren Abstand von O die Abszissen x_1 und x_2 bestimmt sind, mit den Tangenten an die fragliche Kurve zusammenfallen, welche parallel zu OY' sind.

Wenn die krumme Oberfläche durch die Umwälzung der Kurve $A'B'$ um die Axe OX entstanden wäre; so vereinfacht sich der vorstehende Ausdruck dadurch, daß man die Gleichung dieser Kurve

$$y'=F(x) \qquad \ldots.(76)$$

setzt und beachtet, daß alsdann nach §. 131^a, Gleichung (187),

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}\pm\sqrt{[F(x)]^2-y^2}\,\sqrt{\div 1}\sqrt{-1} \qquad \ldots.(77)$$

oder

$$z = \pm\sqrt{[F(x)]^2 - y^2} \qquad \ldots\ldots (78)$$

die Gleichung der fraglichen Umwälzungsfläche ist. Das Zeichen + gilt für den über der Ebene XY liegenden Theil, das Zeichen — dagegen für den unterhalb derselben liegenden Theil der krummen Fläche. Betrachten wir zuvörderst die obere Hälfte; so hat man für dieselbe wegen der Gleichung (78)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{F(x)}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}\,\frac{dF(x)}{dx} \\ \text{und} \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{-y}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}; \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (79)$$

demnach bei gehöriger Reduktion

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{F(x)\sqrt{1+\left[\frac{dF(x)}{dx}\right]^2}}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}$$

$$\text{oder auch} = \frac{y'\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y'^2 - y^2}},$$

wenn man für $F(x)$ einfach den Werth der Ordinate y' der erzeugenden Kurve aus Gleichung (76) substituirt. Da nun die Funktion y' nur von x und nicht von y abhängt, mithin auch $y'\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}$ eine von y ganz unabhängige Funktion ist; so hat man

$$\int dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = y'\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}\int\frac{dy}{\sqrt{y'^2 - y^2}}$$

$$= y'\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}\int\frac{d\left(\frac{y}{y'}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{y'}\right)^2}}$$

$$= y'\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}\left(\text{const} - \text{arc. cos}\,\frac{y}{y'}\right).$$

Beachtet man nun ferner, daß die Gränzen y'' und y' des

vorstehenden Integrals aus Gleichung (75) resp. $+y'$ und $-y'$ oder $+F(x)$ und $-F(\alpha)$ sind; so erhält man für dasselbe

$$\int_{-y'}^{y'} dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = y' \sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}$$

$$\times[-\text{arc. cos}1+\text{arc cos}(-1)] = \pi y' \sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2} \quad \ldots\ldots (80)$$

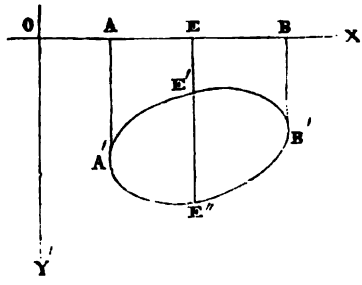
Dieser Werth, in Gleichung (75) eingeführt, ergibt die obere Hälfte desjenigen Theiles der Umwälzungsfläche, welcher zwischen den Abszissen $x_1 = OA$ und $x_2 = OB$ liegt: nimmt man den erhaltenen Ausdruck doppelt; so kommt für die ganze zwischen x_1 und x_2 liegende Umwälzungsfläche

$$V = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx\, y' \sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2} \quad \ldots\ldots (81)$$

Der doppelte Werth des Ausdruckes (80), nachdem derselbe mit dx multiplizirt ist, oder die Größe $2\pi y' dx \sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}$, stellt offenbar die Oberfläche eines als abgestumpfter Kegel zu betrachtenden Theiles der Umwälzungsfläche dar, welcher durch die Umdrehung des Kurvenelementes $E'F' = ds = dx \sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}$ (s. §. 98) um die Axe OX erzeugt ist, dessen oberer und unterer Halbmesser resp. $EE' = y'$ und $FF' = y' + dy'$ und dessen Höhe $EF = dx$ ist. Da diese Größe stets eine absolute Quantität darstellen muß, dieselbe aber negativ werden würde, sobald y' negativ würde, wenn man nicht gleichzeitig auch die darin enthaltene Wurzelgröße negativ nähme; so leuchtet ein, daß das vorstehende Integral (81) auf Ein Mal immer nur für solche Theile einer Umwälzungsfläche genommen werden kann, welche durch Theile einer Kurve erzeugt sind, die, wie $A'B'$, ganz auf Einer Seite der Axe OX liegen.

Wenn die Umwälzungsfläche durch Umdrehung einer geschlossenen Kurve $A'E'B'E''$, die in ihrer ganzen Ausdehnung auf Ein und derselben Seite der Axe OX liegt, um die Axe OX

entstanden ist, und AA', BB' sind die zu OY' parallelen Tangenten an dieselbe; so sei für den Theil $A'E'B'$



$$y' = F_1(x) \qquad \ldots\ldots (82)$$

und für den Theil $A'E''B'$

$$y'' = F_2(x) \qquad \ldots\ldots (83)$$

die Gleichung der Kurve; ferner sei $OA = x_1$ und $OB = y_2$. Da nun nach Gleichung (81)

$$V' = 2\pi \int_{x_1}^{x^2} dx \, . \, y' \sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}$$

die durch Umdrehung des Theiles $A'E'B'$ erzeugte Oberfläche und

$$V'' = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx \, . \, y'' \sqrt{1 + \left(\frac{dy''}{dx}\right)^2}$$

die durch Umdrehung des Theiles $A'E''B'$ erzeugte Oberfläche ist; so hat man für die gesammte ringförmige Umwälzungsfläche $V = V' + V''$, d. i.

$$V = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx \left[y' \sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2} + y'' \sqrt{1 + \left(\frac{dy''}{dx}\right)^2} \right] \qquad \ldots\ldots (84)$$

§. 155. Größe der Kegeloberfläche.

Wenn man den Neigungswinkel einer Seitenlinie des Kegels mit kreisförmiger Basis gegen dessen Axe $= \alpha$ setzt, den Null-

punkt des Koordinatensystemes in der Spitze des Kegels und die Axe OX in der Axe des Kegels annimmt; so ist

$$\left.\begin{aligned}(\varrho)&=x+x\operatorname{tang}\alpha.\sqrt{-1}\\ \text{oder}\qquad\\ y'&=x\operatorname{tang}\alpha\end{aligned}\right\}\quad\ldots.(85)$$

Die Gleichung der geraden Linie, durch deren Umdrehung um die Axe OX die Kegeloberfläche erzeugt wird. Der letztere Ausdruck tritt an die Stelle der Funktion (76), sodaß man denselben statt y' und außerdem

$$\frac{dy'}{dx}=\operatorname{tang}\alpha,$$

mithin

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

in die Formel (81) zu substituiren hat. Dies ergibt für die krumme Oberfläche eines Kegels von der Höhe h, wenn man $x_2=h$ und $x_1=0$ setzt,

$$V=2\pi\int_0^h\frac{x\,dx\operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\pi h^2\operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha}\qquad\ldots.(86)$$

Wenn man den Halbmesser der Grundfläche dieses Kegels $=r$ setzt; so hat man $\frac{r}{h}=\operatorname{tang}\alpha$, also $\frac{1}{\cos\alpha}=\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}=\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{h}$; mithin

$$V=\pi r\sqrt{h^2+r^2}\text{ oder }=\pi r b,\qquad\ldots.(87)$$

wenn man die Länge der Seitenlinie $\sqrt{h^2+r^2}$ mit b bezeichnet.

§. 156. Größe der Zylinderoberfläche.

Wenn die Axe OX in der Axe des Zylinders von kreisförmiger Basis angenommen wird; so ist

$$\left.\begin{aligned}(\varrho)&=x+r\sqrt{-1}\\ \text{oder}\qquad\\ y'&=r\end{aligned}\right\}.\quad\ldots.(88)$$

die Gleichung einer mit OX parallelen Linie, welche bei ihrer Umdrehung um die Axe OX die Oberfläche eines Zylinders beschreibt, dessen Basis ein Kreis vom Halbmesser r ist. Da hiernach

$$\frac{dy'}{dx}=0, \text{ und mithin } \sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}=1$$

wird; so ergibt die Formel (81) für die krumme Oberfläche des fraglichen Zylinders von der Höhe h, wenn man darin $x_2=h$ und $x_1=0$ setzt,

$$V=2\pi\int_0^h r\,dx=2\pi rh \qquad \ldots.(89)$$

§. 157. Größe der Kugeloberfläche.

Die Gleichung einer Kugeloberfläche vom Halbmesser r für ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkte der Kugel liegt, ist nach §. 131[a] Gleichung (189)

$$(\varrho)=x+y\sqrt{-1}+\sqrt{r^2-x^2-y^2}\sqrt{-1}\sqrt{-1}, \qquad \ldots.(90)$$

woraus

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2} \qquad \ldots.(91)$$

folgt.

Jenachdem man die Wurzelgröße $\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ positiv oder negativ nimmt, stellt diese Gleichung einen Vektor dar, welcher oberhalb oder unterhalb der Ebene XY liegt.

Wegen der Beziehung (91) hat man

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},$$

also

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

und nach Gleichung (75) für irgend ein Stück der Einen Halbkugel, welches sich auf die Figur A'B'B''A'' projizirt,

$$V=r\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y'}^{y''}\frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

oder, da $\int\frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\int\frac{d\left(\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}}$

$$=\text{const.}-\text{arc.cos}\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

ist,

$$V=r\int_{x_1}^{x_2}dx\left(-\text{arc.cos}\frac{y''}{\sqrt{r^2-x^2}}+\text{arc.cos}\frac{y'}{\sqrt{r^2-x^2}}\right).$$

Will man nun die Oberfläche der vollen Halbkugel bestimmen; so erhält man für die Projektion A′B′B″A″ ihrer Umgränzung auf die Ebene XY (wenn man in Gleichung (91) $z=0$ setzt)

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2},$$

wodurch ein größter Kreis der Kugel dargestellt wird. Statt der Beziehungen (73) und 74) hat man also resp.

$$y'=-\sqrt{r^2-x^2},$$
$$y''=+\sqrt{r^2-x^2};$$

außerdem hat man $x_1=-r$ und $x_2=+r$. Da hiernach

$$\text{arc.cos}\frac{y''}{\sqrt{r^2-x^2}}=\text{arc.cos}\,1=0 \text{ und}$$

$$\text{arc.cos}\frac{y'}{\sqrt{r^2-x^2}}=\text{arc.cos}(-1)=\pi$$

ist; so erhält man für die Oberfläche der Halbkugel

$$V=\pi r\int_{-r}^{r}dx=2\pi r^2, \qquad \ldots.(92)$$

und demnach für die Oberfläche der ganzen Kugel

$$V=4\pi r^2 \qquad \ldots.(93)$$

Einfacher erhält man dieses Resultat, wenn man die Kugeloberfläche als durch die Umdrehung eines Halbkreises um die Axe OX entstanden ansieht, für welchen Halbkreis man statt Gleichung (76)

$$y' = \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$\text{also } \frac{dy'}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} \text{ und } \sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

hat. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (81), indem man $x_1 = r$ und $x_2 = -r$ setzt; so ergibt sich für die Oberfläche der ganzen Kugel unmittelbar

$$V = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2,$$

wie vorhin.

Wenn man in der vorstehenden Gleichung das Integral zwischen den Gränzen x_2 und x_1 nimmt, und $x_2 - x_1 = h$ setzt; so erhält man daraus für die krumme Oberfläche einer Zugelzone von der Höhe h

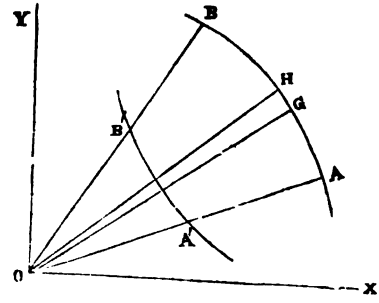
$$V = 2\pi r \int_{x_1}^{x_2} dx = 2\pi r(x_2 - x_1) = 2\pi r h, \qquad \ldots . (94)$$

ein Ausdruck, welcher von der besonderen Lage dieser Zone auf der Kugel ganz unabhängig ist, und demnach auch für die krumme Oberfläche eines Kugelabschnittes von der Höhe h gilt, für welchen man $x_2 = r$ und $x_1 = r - h$ haben würde.

§. 158. Bestimmung des Flächeninhaltes einer ebenen Figur, wenn deren Umgränzung auf Polarkoordinaten bezogen ist.

Wenn AB die Gränze einer in der Ebene XY liegenden Figur AOB bildet; so kann man sich denken, die Quantität oder der Flächeninhalt derselben sei dadurch erzeugt, daß sich der Vektor OA um den Punkt O in der Richtung XY drehe und gleichzeitig seine Länge ändere. Findet nun zwischen der Länge des Vektors $OG = \varrho$ irgend eines Punktes G der Kurve und dem

Neigungswinkel GOX desſelben gegen die Axe OX die Beziehung



$$(\varrho)=F(\varphi) \qquad \ldots.(95)$$

ſtatt, ſodaß die Gleichung der Kurve AB, auf Polarkoordinaten bezogen,

$$(\varrho)=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})=F(\varphi)(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})$$

iſt; ſo ſei $OH=\varrho+d\varrho$ der Werth von ϱ, welchen man aus der Beziehung (95) erhält, wenn man darin φ um den unendlich kleinen Bogen $HOG=d\varphi$ wachſen läßt. Bei dieſer Drehung des Vektors ϱ um den Winkel $d\varphi$ beſchreibt derſelbe die dreieckige Sektorfläche GOH, deren Grundlinien $OG=\varrho$ iſt, und deren Höhe wegen der unendlich kleinen Drehung gleich dem Kreisbogen angenommen werden kann, den gleichzeitig der Endpunkt G des Vektors OG beſchreibt. Da dieſer Kreisbogen $=\varrho d\varphi$ iſt; ſo hat man für den Flächeninhalt des elementaren Dreiecks GOH

$$\tfrac{1}{2}\varrho.\varrho d\varphi=\tfrac{1}{2}\varrho^2 d\varphi.$$

Bezeichnet man nun den Winkel AOX mit φ_1 und den Winkel BOX mit φ_2; ſo wird man den Flächeninhalt des Sektors $AOBH=V$ erhalten, wenn man die Summe aller Werthe nimmt, die ſich aus dem vorſtehenden Ausdrucke ergeben, ſobald man darin φ von φ_1 bis φ_2 ſtetig variiren läßt. Dies ergibt

$$V=\tfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varrho^2 d\varphi \qquad \ldots.(96)$$

Den Flächeninhalt eines Kreises würde man hieraus z. B. erhalten, wenn man ϱ konstant $=r$, ferner $\varphi_2=2\pi$ und $\varphi_1=0$ setzte. Man erhält hierdurch

$$V=\frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi=\pi r^2,$$

wie in §. 142.

Wäre der zwischen den Richtungen OA und OB liegende Theil einer Figur, wie ABB'A' zu bestimmen, welche oberwärts durch die Kurve AB, für die man

$$\varrho''=F_2(\varphi) \qquad \ldots.(97)$$

habe, und unterwärts durch die Kurve A'B', für die man

$$\varrho'=F_1(\varphi) \qquad \ldots.(98)$$

habe, begränzt ist; so leuchtet ein, daß die fragliche Flächengröße durch die Formel

$$V=\tfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(\varrho''^2-\varrho'^2)\,d\varphi \qquad \ldots.(99)$$

gegeben ist.

§. 159. Bestimmung der Größe einer krummen Fläche, wenn deren Gleichung durch Polarkoordinaten gegeben ist.

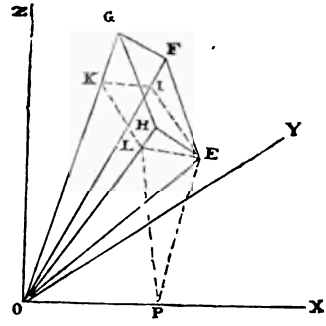
Die auf Polarkoordinaten bezogene Gleichung irgend einer krummen Fläche sei

$$(\varrho)=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi\cos\psi.\sqrt{-1}+\sin\varphi\sin\psi.\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}),$$

worin φ die Deklination des Vektors ϱ für irgend einen Punkt der gegebenen Fläche, oder dessen Neigung gegen die Axe OX, ψ die Inklination dieses Vektors oder die Neigung einer durch denselben und die Axe OX gelegten Ebene gegen die Ebene XY bezeichnet (s. die Untersuchungen des vierten Abschnittes), und es sei ϱ eine Funktion der beiden unabhängig veränderlichen Größen φ und ψ, also

$$\varrho=F(\varphi,\psi) \qquad \ldots.(100)$$

Faſſen wir jetzt ein Element EFGH der gegebenen Fläche von unendlich kleinen Dimenſionen ins Auge, welches zwiſchen zwei durch die Axe OX gehenden, unter den Inklinationswinkeln ψ und $\psi+d\psi$ gegen die Ebene XY ſich neigenden Ebenen EOF und HOG, ferner zwiſchen zwei Kegeloberflächen EOH und FOG liegt, deren Axe OX iſt und deren Seitenlinien ſich unter den Deklinationswinkeln $EOX=HOX=\varphi$ und $FOX=GOX=\varphi+d\varphi$ gegen jene Axe neigen. Um die Größe dieſer als eben zu betrachtenden unendlich kleinen Fläche EFGH zu beſtimmen; ſo ſeien J, K, L die Durchſchnittspunkte einer mit dem Halbmeſſer $OE=\varrho$ um O beſchriebenen Kugeloberfläche reſp. mit den Linien OF, OG, OH. Da dieſe Linien auf der Kugeloberfläche oder auch auf der Ebene der als eben angenommenen Figur EJKL perpendikular ſtehen; ſo bildet die letztere Figur EJKL die Projektion des Flächenelementes EFGH auf die Ebene derſelben. Bezeichnet man daher den Flächeninhalt von EJKL mit v, den Neigungswinkel der Ebene EFGH gegen die Ebene EJKL mit α und den Flächeninhalt des Elementes EFGH mit dV; ſo hat man



$$dV.\cos\alpha = v \text{ oder}$$

$$dV = \frac{v}{\cos\alpha}.$$

Denkt man ſich durch den Punkt E eine auf der Axe OX perpendikular ſtehende Ebene EPL gelegt; ſo wird auch der Punkt L in dieſer Ebene liegen, und man hat PL=PE. Es folgt ferner, daß EL auf der Ebene EOF und mithin auch auf der Linie EJ, und ebenſo daß JK auf der Ebene EOF und auf der Linie EJ perpendikular ſtehe, daß alſo die Figur EJKL=v wie ein Rechteck und die Figur EFGH wie ein Parallelogramm zu betrachten ſei.

Iſt nun $OE=\varrho$; ſo wird $OF=\varrho+\frac{d\varrho}{d\varphi}d\varphi$ und $OH=\varrho+\frac{d\varrho}{d\psi}d\psi$

sein, worin $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ und $\frac{d\varrho}{d\psi}$ die partiellen Differenzialkoeffizienten der Funktion (100) resp. für φ und ψ bezeichnen. Da $OJ=OL=OE=\varrho$ sind; so hat man ferner $JF=\frac{d\varrho}{d\varphi}d\varphi$ und $LH=\frac{d\varrho}{d\psi}d\psi$. Außerdem ist $EJ=\varrho\,d\varphi$ und weil $EP=\varrho\sin\varphi$ und Winkel $EPL=d\psi$ ist, $EL=\varrho\sin\varphi\,d\psi$; demnach hat man für den Flächeninhalt des Rechteckes EJKL

$$v=\varrho^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi.$$

Um den Neigungswinkel α der Ebene EFGH gegen die Ebene EJKL oder den Neigungswinkel der beiden Normalen auf diesen Ebenen gegeneinander zu bestimmen, sehe man für den Augenblick EJ als die Axe OX, EL als die Axe OY und eine in E auf der Ebene EJKL perpendikular stehende Linie als die Axe OZ an. Um nun die Richtung der Ebene EFGH, welche durch die drei Punkte E, F, H geht, gegen die Ebene EJKL nach §. 129 zu bestimmen, hat man offenbar zu setzen

$$a=0,\ b=0,\ c=0,$$

$$a_1=EJ=\varrho\,d\varphi,\ b_1=0,\ c_1=JF=\frac{d\varrho}{d\varphi}d\varphi,$$

$$a_2=0,\ b_2=EL=\varrho\sin d\psi,\ c_2=LH=\frac{d\varrho}{d\psi}d\psi.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die dortigen Formeln (168) ergeben dieselben

$$f=\frac{c_1}{a_1}=\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi},$$

$$g=\frac{c_2}{b_2}=\frac{1}{\varrho\sin\varphi}\frac{d\varrho}{d\psi},$$

und wenn man diese Werthe für f und g in die letzte der Gleichungen (154) §. 127 einführt; so erhält man für den Kosinus des fraglichen Neigungswinkels α

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho\sin\varphi}\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2}}.$$

Durch diesen Werth für $\cos\alpha$ und den vorhergehenden für v wird der obige Ausdruck für das Flächenelement **EFGH**

$$dV=\varrho^2\sin\varphi d\varphi d\psi\sqrt{1+\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho\sin\varphi}\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2} \quad \ldots.(101)$$

Nehmen wir nun an, der zu bestimmende Theil der gegebenen Fläche liege zwischen zwei durch die Axe **OX** gehenden Ebenen, welche sich resp. unter den Winkeln ψ_1 und ψ_2 gegen die Ebene **XY** neigen, und auf den anderen beiden Seiten sei derselbe durch zwei in der krummen Oberfläche liegende Linien begränzt, für welche man resp.

$$\varphi'=F_1(\psi) \quad \ldots.(102)$$

und

$$\varphi''=F_2(\psi) \quad \ldots.(103)$$

habe; so ergibt das Integral

$$d\psi\int_{\varphi'}^{\varphi''}\varrho^2\sin\varphi d\varphi\sqrt{1+\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho\sin\varphi}\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2},$$

in welchem ψ als konstante Größe betrachtet wird, den Flächeninhalt eines unendlich schmalen Streifens des fraglichen Flächentheiles, welcher zwischen den beiden erweiterten Ebenen **EOF** und **HOG** liegt, und

$$V=\int_{\psi_1}^{\psi_2}d\psi\int_{\varphi'}^{\varphi''}\varrho^2\sin\varphi d\varphi\sqrt{1+\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho\sin\varphi}\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2} \quad \ldots(104)$$

stellt den Inhalt des ganzen gesuchten Flächentheiles dar. Wenn der Pol **O** ganz im Inneren der gegebenen Fläche liegt, und man will den Inhalt der gesammten Fläche bestimmen; so hat man offenbar für die Gränzen des vorstehenden Integrales

$$\varphi'=0,\ \varphi''=\pi,$$
$$\psi_1=0,\ \psi_2=2\pi$$

zu setzen.

Wollte man von der gegebenen Fläche ein solches Stück bestimmen, welches durch zwei Kegelflächen, deren Seitenlinien sich

resp. unter den Winkeln φ_1 und φ_2 gegen ihre Axe OX neigen, und andererseits durch zwei in der krummen Fläche liegende Kurven begränzt wird, für welche man resp.

$$\psi' = F_1(\varphi) \quad \ldots\ldots (105)$$

und

$$\psi'' = F_2(\varphi) \quad \ldots\ldots (106)$$

hat; so wird dasselbe offenbar durch das Integral

$$V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi'}^{\psi''} \varrho^2 \sin\varphi \, d\psi \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho \sin\varphi}\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2}$$

oder durch

$$V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi d\varphi \int_{\psi'}^{\psi''} \varrho^2 d\psi \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho \sin\varphi}\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2} \quad \ldots\ldots (107)$$

dargestellt.

In dieser Formel hat man

$$\psi' = 0, \ \psi'' = 2\pi,$$
$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = \pi$$

zu setzen, wenn der Pol O ganz im Inneren der gegebenen Fläche liegt und man den Inhalt der gesammten Oberfläche zu erhalten wünscht.

Wenn die Fläche durch die Umdrehung einer ebenen Kurve, für welche man

$$\varrho' = F(\varphi) \quad \ldots\ldots (108)$$

hat, um die Axe OX enstanden ist; so wird auch der Vektor ϱ für irgend einen Punkt der Umwälzungsfläche von dem Werthe seines Inklinationswinkels ψ unabhängig oder es wird

$$\varrho = \varrho' = F(\varphi),$$

$$\text{also } \frac{d\varrho}{d\psi} = 0$$

sein. Hierdurch wird die Formel (107)

$$V=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varrho^2\sin\varphi\,d\varphi\sqrt{1+\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}\int_{\psi'}^{\psi''}d\psi$$

Will man nun eine ganze Zone dieser Umwälzungsfläche darstellen; so hat man $\psi''=2\pi$ und $\psi'=0$ zu setzen, wodurch

$$\int_{\psi'}^{\psi''}d\psi=\psi''-\psi'=2\pi,$$

also

$$V=2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varrho^2\sin\varphi\,d\varphi\sqrt{1+\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} \qquad \ldots.(109)$$

wird.

Für die Oberfläche der ganzen Kugel hat man z. B. $\varrho=r$, also $\frac{d\varrho}{d\varphi}=0$; mithin

$$V=2\pi r^2\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi,$$

oder weil $\int\sin\varphi\,d\varphi=\text{const.}-\cos\varphi$ ist,

$$V=2\pi r^2(-\cos\pi+\cos 0)=4\pi r^2.$$

Sechster Abſchnitt.

Arithmetiſche Darſtellung der Körpervolumen.

§. 160. Quantität eines Körpers und Volumeinheit.

Nachdem wir im Früheren die Längen- und Flächengrößen in ihren gegenſeitigen Verhältniſſen ſowol der Quantität, wie der Richtung nach durch die entſprechenden arithmetiſchen Methoden darzuſtellen verſucht haben, bleiben endlich noch die körperlichen Raumgrößen zu betrachten übrig.

Ihre charakteriſtiſche Eigenſchaft iſt gleichzeitige Ausdehnung nach drei Dimenſionen des abſoluten Raumes. Hierdurch iſt der Begriff der Quantität eines Körpers oder eines Körpervolums bedingt. Der Körper entſteht, wie die Linie und die Fläche, durch die ſtetige Bewegung ſeiner Gränze, welche hier die Fläche bildet. Da dieſe Gränze ſelbſt Form beſitzt, und mithin bei ihrer Bewegung nicht bloß ihre Lage, ſondern auch ihre Form ändern kann; ſo folgt, daß die Quantität eines Körpers von der äußeren Form ſeiner Umgränzung in einer ähnlichen Weiſe abhängig ſein wird, wie Dies im vorhergehenden Abſchnitte bereits von den Flächengrößen nachgewieſen iſt. Um jedoch die verſchiedenen Körpervolumen einzig und allein ihrer Quantität nach zu erzeugen, wobei es gleichgültig bleibt, in welcher Art und Weiſe dieſelben begränzt ſeien, genügt es offenbar, daß man ſich eine gewiſſe Fläche denkt, welche ſich, ohne ihre Form zu ändern parallel mit ſich ſelbſt in einer beſtimmten Richtung des Raumes fortbewegt.

Nimmt man zu dieſer erzeugenden Fläche die im §. 138 beſchriebene Flächeneinheit, alſo das ebene Quadrat an, deſſen Seite gleich der Längeneinheit λ iſt, und theilt derſelben eine

ſolche Bewegung mit, daß alle ihre Punkte in einer auf ihrer Ebene perpendikular ſtehenden Richtung fortrücken; ſo bildet dasjenige Körpervolum, welches man erhält, nachdem jene Fläche um eine Länge $=\lambda$ fortgerückt iſt, alſo der Würfel, deſſen Seite die Längeneinheit iſt, die Volumeinheit, durch welche alle Körperquantitäten ebenſo gemeſſen werden, wie die Linien durch die Längeneinheit, die Flächen durch Flächeneinheit und die abſoluten Zahlen durch die Zahl 1. Bezeichnen wir jene Volumeinheit durch μ.

Es leuchtet ein, daß durch die erwähnte Bewegung der Flächeneinheit ein ſtetiges Syſtem von Körpervolumen beſchrieben werden wird, deſſen erſtes Glied $= 0$ die Flächeneinheit ſelbſt iſt und deſſen übrige Glieder, bis zum Werthe ∞ anwachſend, rechtwinklige Prismen bilden, deren Grundfläche gleich der Flächeneinheit iſt.

§. 161. Beſtimmungen des Volums eines rechtwinkligen Parallelepipedums aus ſeinen drei Kanten.

Wenn Ox, Oy, Oz, die drei im Punkte O zuſammenſtoßenden rechtwinkligen Kanten der obigen Volumeinheit μ ſind, ſodaß $Ox = Oy = Oz =$ der Längeneinheit λ iſt; ſo denke man ſich eine jede dieſer drei Kanten in n gleiche Theile von der Länge $\frac{\lambda}{n}$ zerlegt und durch die Theilpunkte auf Ox, Oy, Oz reſp. mit yOz, xOz, xOy parallele Ebenen gelegt. Durch dieſe Ebenen wird die Volumeinheit offenbar in n^3 einander gleiche kleinere Würfel zerlegt, von denen ein jeder das Volum $\frac{\mu}{n^3}$ beſitzt.

Enthalten nun die drei im Punkte O zuſammenſtoßenden Kanten OX, OY, OZ eines rechtwinkligen Parallelpipedums reſp. p, q, r der eben erwähnten Theile, von denen jeder $= \frac{\lambda}{n}$ iſt, ſodaß die Länge von $OX = p\,\frac{\lambda}{n}$, die von $OY = q\,\frac{\lambda}{n}$ und die von $OZ = r\,\frac{\lambda}{n}$ iſt; ſo erhellet, wenn man ſich durch die Theilpunkte auf OX, OY, OZ reſp. mit YOZ, XOZ, XOY parallele Ebe-

nen gelegt denkt, daß das letztere Parallelepipedum eine durch das Produkt pqr bestimmte Anzahl der obigen kleineren Würfel enthält, von denen ein jeder das Volum $\frac{\mu}{n^3}$ besitzt. Für das Volum M des fraglichen Parallelepipedums hat man also

$$M = pqr \cdot \frac{\mu}{n^3} = \frac{p}{n} \frac{q}{n} \frac{r}{n} \cdot \mu \qquad \ldots (1)$$

oder $\frac{pqr}{n^3}$ Volumeinheiten.

Bezeichnet man jetzt die Länge der Kanten OX, OY, OZ resp. mit a, b, c und die absoluten Zahlen, welche deren Verhältniß zur Längeneinheit λ ausdrücken, resp. mit α, β, γ, sodaß man

$$a = \alpha\lambda, \quad b = \beta\lambda, \quad c = \gamma\lambda,$$

oder

$$\frac{a}{\lambda} = \alpha, \quad \frac{b}{\lambda} = \beta, \quad \frac{c}{\lambda} = \gamma$$

hat; so folgt, weil nach dem Vorhergehenden auch $a = p \cdot \frac{\lambda}{n}$, $b = q \cdot \frac{\lambda}{n}$, $c = r \cdot \frac{\lambda}{n}$ oder

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{p}{n}, \quad \frac{b}{\lambda} = \frac{q}{n}, \quad \frac{c}{\lambda} = \frac{r}{n}$$

sein soll, daß man

$$\frac{p}{n} = \alpha, \quad \frac{q}{n} = \beta, \quad \frac{r}{n} = \gamma$$

haben müsse.

Durch diese Werthe für $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$, $\frac{r}{n}$ reduzirt sich die Formel (1) auf

$$M = \alpha\beta\gamma \cdot \mu \qquad \ldots . (2)$$

α, β, γ stellen in dieser Formel für das Volum eines rechtwinkligen Parallelepipedums diejenigen absoluten Zahlen dar, welche das Verhältniß der Länge einer jeden der drei zusammenstoßenden Kanten dieses Körpers zur Längeneinheit bestimmen, und μ ist die Volumeinheit oder das Volum eines über derselben Längen-

einheit beschriebenen Würfels. In der Regel läßt man das Zeichen μ weg und setzt für die Zahlen α, β, γ die erwähnten drei Kanten a, b, c selbst, indem man einfach

$$M = abc \qquad \ldots . (3)$$

schreibt und den Sinn dieser Formel in Gedanken in der vorhergehenden Weise supplirt. Dies wird auch im Folgenden überall geschehen; man hat dabei die betreffenden Formeln stets in der eben erwähnten Weise zu verstehen, und nicht etwa zu wähnen, daß ein Körpervolum gleich dem Produkte aus drei Linien sei, was offenbar absurd wäre, da Linien und Körper ihrer Quantität nach ganz heterogene Größen sind, deren Entstehung auseinander nicht durch dergleichen Operationen in aller Strenge repräsentirt werden kann.

Da die Formel (2) oder (3) für alle solche Werthe der Kanten a, b, c gilt, für welche α, β, γ rationale Zahlen werden, d. h. für alle Linien, welche mit der Längeneinheit λ kommensurabel sind; so gilt dieselbe auch für alle irrationalen Werthe von $\alpha, \beta \gamma$, oder ganz allgemein für ein jedes Parallelepipedum, was auch schon einleuchtet, wenn man sich die Theile $\frac{\lambda}{n}$, in welche eine jede Kante der Volumeinheit getheilt wurde, unendlich klein oder die Zahl n unendlich groß denkt, wodurch die inkommensurabelen Seitenkanten den kommensurabelen in der obigen Beziehung gleich werden.

§. 162. Allgemeine Bestimmung des Volums irgend eines Körpers aus seiner Begränzung, wenn dieselbe durch rechtwinklige Koordinaten gegeben ist.

Ein jeder über der Ebene XY liegende Körper kann in der Weise erzeugt gedacht werden, daß sich eine gewisse ebene Figur aus dieser Ebene in der Richtung einer auf XY perpendikular stehenden Axe OZ erhebt und dabei ihre Form, d. h. ihre lineare Begränzung, nach einem bestimmten Gesetze ändert.

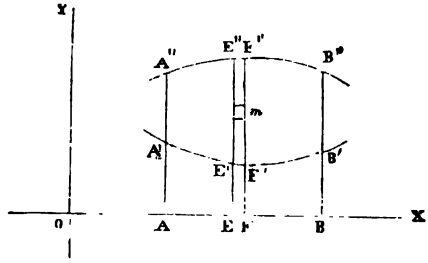
Nimmt man zuvörderst an, das auf diese Weise erzeugte Stück eines Körpers, dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}\sqrt{-1},$$

worin

$$z = F(x, y) \qquad \ldots\ldots (4)$$

ist, bestimmt wird, sei unterwärts durch die Ebene XY und zwar durch die in dieser Ebene liegenden Figur A′A″B″B′, seitwärts durch zwei in A′A″ und B′B″ auf der Ebene XY und zugleich auf der Axe OX perpendikular stehende Ebenen und durch zwei in A″B″ und A′B′ gleichfalls auf der Ebene XY perpendikular



stehende gekrümmte Flächen und oberwärts durch eine Fläche begränzt, auf welche sich die vorstehenden Formeln (4) beziehen; so habe man zur Bestimmung der Figur A′A″B″B′ für die Kurve A″B″ die Beziehung

$$y'' = f_2(x), \qquad \ldots\ldots (5)$$

für die Kurve A′B′ die Beziehung

$$y' = f_1(x), \qquad \ldots\ldots (6)$$

und es sei

$$OA = x_1, \quad OB = x_2 \qquad \ldots\ldots (7)$$

Es leuchtet ein, daß man sich die obige Art der Entstehung des fraglichen Körpers auch in der Weise vorstellen kann, daß sich ein jedes unendlich kleine rechtwinklige Flächenelement der Figur A′A″B″B′, wie das bei m, dessen Koordinaten x und y, dessen Seiten dx und dy sind, und dessen Flächeninhalt demnach $= dx \,.\, dy$ ist, in der Richtung der Axe OZ bis zu der durch den Werth von z aus Gleichung (4) gegebenen Höhe erhebe, und mithin ein rechtwinkliges Parallelepipedum von dem Volum $z dx.dy$ beschreibe. Die Summe aller dieser Prismen von unendlich klei-

ner Grundfläche wird alsdann das gesuchte Volum des in Rede stehenden Körpertheiles bilden.

Nimmt man nun die Summe aller Werthe jenes Ausdruckes $z\,dx\,dy$, welche man erhält, wenn man darin die Größe y von $EE' = y'$ bis $EE'' = y''$ stetig variiren läßt; so ergibt sich offenbar das Volum einer Scheibe des fraglichen Körpers, welche zwischen den in $E'E''$ und $F'F''$ auf XY perpendikular stehenden Ebenen liegt und die unendlich geringe Stärke $EF = dx$ besitzt. Diese Summe ist aber

$$dx \int_{y'}^{y''} z\,dy,$$

worin nach der Integration für y'' und y' ihre Werthe aus den Formeln (5) und (6) zu setzen sind, sodaß diese Größe alsdann nur noch eine Funktion von x bleibt.

Hiernächst wird das ganze über $A'A''B''B'$ stehende Körpervolum erhalten, wenn man die Summe aller Werthe des vorstehenden Ausdruckes nimmt, welche sich ergeben, wenn man darin die Größe x von $OA = x_1$ bis $OB = x_2$ variiren läßt. Man hat demnach für das fragliche Volum M

$$M = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y'}^{y''} z\,dy \qquad \ldots\ (8)$$

Wäre der gegebene Körpertheil seitwärts von den in $A'A'B''B'$ auf der Ebene XY perpendikular stehenden Flächen, oberwärts durch eine Fläche, für welche man

$$z'' = F_2(x, y) \qquad \ldots\ (9)$$

hätte, und unterwärts durch eine andere Fläche begränzt, für welche man

$$z' = F_1(x, y) \qquad \ldots\ (10)$$

hätte; so würde das zwischen der Ebene XY und der oberen Fläche liegende Volum nach Gleichung (8)

$$M'' = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y'}^{y''} z''\,dy$$

und das zwischen der Ebene XY und der unteren Fläche liegende Volum nach derselben Gleichung

$$M' = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y'}^{y''} z' dy,$$

mithin das Volum des gegebenen Körpertheiles $M = M'' - M'$, d. i.

$$M = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y'}^{y''} z'' dy - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y'}^{y''} z' dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y'}^{y''} (z'' - z') dy \quad \ldots\ (11)$$

sein.

Die Größe $\int_{y'}^{y''} (z'' - z') dy$ stellt nach §. 140. Gleichung (8) offenbar den Flächeninhalt des in EE″ auf der Ebene XY und zugleich auf der Axe OX perpendikular stehenden Querschnittes des gegebenen Körpertheiles dar. Wenn man im Stande ist, diesen Querschnitt durch gewisse bekannte Beziehungen zwischen den Dimensionen dieses Körpers schon im voraus als eine Funktion der Abszisse $OE = x$ anzugeben; so kann hierdurch die Berechnung des Integras (11) häufig sehr abgekürzt werden. Setzt man also

$$\int_{y'}^{y''} (z'' - z') dy = X; \qquad \ldots\ (12)$$

so erhält man statt der Formel (11) für das in Rede stehende Körpervolum

$$M = \int_{x_1}^{x_2} X dx \qquad \ldots\ (12)$$

Wenn der Körper, dessen Volum zu ermitteln ist, durch die Umdrehung einer Kurve, für welche man

$$y' = f(x) \qquad \ldots\ (13)$$

hat, um die Axe OX entſtanden iſt; ſo wird der auf X im Abſtande $OE = x$ perpendikular ſtehende Querſchnitt offenbar ein Kreis vom Halbmeſſer y' ſein: man wird alſo für dergleichen Körper

$$X = \pi y'^2 \qquad \ldots . (14)$$

und demnach einfach

$$M = \pi \int_{x_1}^{x_2} y'^2 \, dx \qquad \ldots . (15)$$

haben. Dieſen Werth für M würde man auch unter den letzteren Umſtänden aus der Formel (11) erhalten, wenn man berückſichtigt, daß nach §. 131[a] Gleichung (187)

$$(\varrho) = x + y\sqrt{-1} \pm \sqrt{y'^2 - y^2}\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}$$

oder

$$z = \pm\sqrt{y'^2 - y^2}$$

die Gleichung einer krummen Fläche iſt, welche durch Umwälzung einer Kurve

$$y' = f(x)$$

um die Axe OX entſtanden iſt. Beachtet man nun ferner, daß man in Gleichung (11) $z'' = +\sqrt{y'^2 - y^2}$, $z' = -\sqrt{y'^2 - y^2}$, alſo $z'' - z' = 2\sqrt{y'^2 - y^2}$ haben würde, und daß y' für die obere Gränze y'' und $-y'$ für die untere Gränze des zweiten Integrals zu ſubſtituiren wäre; ſo würde man erſt

$$\int_{-y'}^{y'} 2\,dy\sqrt{y'^2 - y^2} = \pi y'^2$$

und demnächſt

$$M = \pi \int_{x_1}^{x_2} y'^2 \, dx,$$

wie vorhin, erhalten.

§. 163. Volum eines prismatiſchen Körpers.

Für irgend einen geraden oder ſchiefen prismatiſchen Körper, deſſen Querſchnitte, parallel zu ſeinen beiden Grundflächen G, ſämmtlich den Letzteren an Flächeninhalt gleich ſind, und deſſen parallele Grundflächen um die Länge h in perpendikularer Richtung voneinander abſtehen, hat man in der Formel (12)

$$X = G, \quad x_2 = h, \quad x_1 = 0 \qquad \ldots . (16)$$

zu ſetzen, wodurch dieſelbe für das Volum dieſes Körpers

$$M = \int_0^h G\,dx = Gh \qquad \ldots . (17)$$

ergibt.

Wäre der prismatiſche Körper ein Zylinder mit kreisförmiger Baſis von dem Halbmeſſer r; ſo würde man $G = \pi r^2$; alſo

$$M = \pi r^2 h \qquad \ldots . (18)$$

erhalten.

§. 164. Volum einer Pyramide.

Wenn G der Flächeninhalt der Grundfläche und h die Höhe, d. h. der perpendikulare Abſtand der Spitze irgend einer Pyramide über der Grundfläche G iſt; ſo kann ſehr leicht gezeigt werden, daß die Flächen der verſchiedenen mit der Grundfläche parallelen Querſchnitte ähnliche Figuren ſind, welche ſich, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten, oder auch, wie die Quadrate ihrer Abſtände von der Spitze der Pyramide, verhalten. Bezeichnet man daher irgend einen im Abſtande x von der Spitze mit der Grundfläche G parallel ausgeführten Querſchnitt der Pyramide durch X; ſo hat man

$$X : G = x^2 : h^2$$

oder

$$X = \frac{x^2}{h^2}\, G \qquad \ldots . (19)$$

Substituirt man dieſen Werth für X in Gleichung (12) und ſetzt außerdem $x_2 = h$ und $x_1 = 0$; ſo erhält man für das Volum der gegebenen Pyramide

$$M = \int_0^h \frac{G}{h^2} x^2 dx = \frac{1}{3} Gh \qquad \ldots\ldots (20)$$

Wenn die Grundfläche der Pyramide ein Kreis vom Halbmeſſer r, die Pyramide ſelbſt alſo ein Kegel iſt; ſo hat man $G = \pi r^2$ und mithin für das Volum des Kegels

$$M = \frac{1}{3} \pi r^2 h \qquad \ldots\ldots (21)$$

Wenn man das Integral (12) zwiſchen den Gränzen $x_2 = h$ und $x_1 = x_1$ nimmt; ſo ſtellt

$$M = \int_{x_1}^h \frac{G}{h^2} x^2 dx = \frac{1}{3} G \frac{(h^3 - x_1^3)}{h^2} \qquad \ldots\ldots (22)$$

offenbar das Volum einer abgeſtumpften Pyramide dar, deren Höhe zwiſchen den beiden parallelen Grundflächen $h - x_1$ beträgt. Setzt man nun dieſe Höhe

$$h - x_1 = h_1$$

und bezeichnet die obere der Grundfläche G parallele Fläche mit G_1, ſodaß man wegen der Beziehung (19)

$$G_1 = \frac{x_1^2}{h^2} G$$

hat, eliminirt hierauf vermittelſt der letzteren beiden Beziehungen die Größen x_1 und h aus der Formel (22), indem man dieſelbe

$$\frac{1}{3} G \frac{(h^3 - x_1^3)}{h^2} = \frac{1}{3} G (h - x_1) \frac{h^2 + hx_1 + x_1^2}{h^2}$$

ſetzt und darauf für $h - x_1$ ſeinen Werth h_1, für x_1 ſeinen Werth $h\sqrt{\frac{G_1}{G}}$ einführt und endlich die Multiplikation mit dem

Faktor G an der Größe innerhalb der Klammer ausführt; so ergibt dieselbe für das Volum der in Rede stehenden abgestumpften Pyramide

$$M = \tfrac{1}{3} h_1 (G + \sqrt{G G_1} + G_1) \quad \ldots\ldots (23)$$

Für einen abgestumpften Kegel, wo

$$G = \pi r^2 \text{ und } G_1 = \pi r_1^2$$

wäre, würde man

$$M = \frac{\pi}{3} h_1 (r^2 + r r_1 + r_1^2) \quad \ldots\ldots (24)$$

erhalten.

§. 165. Volum einer Kugel.

Wenn man die Kugel vom Halbmesser r, als durch die Umdrehung eines Halbkreises um die Axe OX entstanden, ansieht; so hat man statt der Beziehung (13), für den Mittelpunkt der Kugel, als Nullpunkt,

$$y' = \sqrt{r^2 - x^2},$$

und demnach statt der Formel (15)

$$M = \pi \int_{x_1}^{x_2} (r^2 - x^2)\, dx = \pi [r^2 (x_2 - x_1) - \tfrac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3)]$$
$$= \pi (x_2 - x_1)[r^2 - \tfrac{1}{3}(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)] \quad \ldots (25)$$

Hierdurch wird offenbar das Volum eines zwischen zwei parallelen Ebenen liegenden Theiles der Kugel dargestellt, von denen die Eine Ebene um x_2 und die andere um x_1 von dem Mittelpunkte der Kugel und beide um $x_2 - x_1$ voneinander abstehen. Wegen der Formeln (18) und (24) erkennt man leicht, daß dieses Volum durch den vorstehenden Ausdruck als die Differenz zwischen einem Zylinder und einem abgestumpften Kegel gegeben ist, von denen der Erstere eine Grundfläche vom Halbmesser r und eine Höhe $= x_2 - x_1$, der Letztere eine un-

tere Grundfläche vom Halbmeſſer x_1, eine obere Grundfläche vom Halbmeſſer x_2 und ebenfalls eine Höhe $= x_2 - x_1$ beſitzt.

Setzt man $x_2 = r$ und $x_2 - x_1 = r - x_1 = h$, alſo $x_1 = r - h$; ſo ergibt dieſer Ausdruck in der Form

$$M = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) \qquad \ldots . (26)$$

das Volum eines Kugelabſchnittes von der Höhe h.

Für $x_2 = r$ und $x_1 = -r$

erhält man aus der Formel (25) oder für $h = 2r$ aus der Formel (26) das Volum

$$M = \tfrac{4}{3} \pi r^3 \qquad \ldots . (27)$$

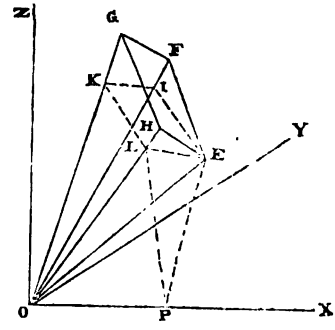
der ganzen Kugel vom Halbmeſſer r.

§. 166. Beſtimmung des Volums eines Körpers, wenn deſſen Oberfläche durch eine Gleichung zwiſchen Polarkoordinaten gegeben iſt.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen und ſonſtigen Begriffe des §s. 159 ſei die Gleichung für die Oberfläche des gegebenen Körpers

$$\varrho = F(\varphi, \psi), \qquad \ldots . (28)$$

worin ϱ die Länge des Vektors OE, φ deſſen Deklination EOX



und ψ dessen Inklination oder die Neigung der Ebene EOX gegen die Ebene XY bezeichnet.

Den körperlichen Inhalt des elementaren Körpertheiles $EFGHO = dM$ wird man nun offenbar gleich dem Inhalte des elementaren Theiles EJKLO einer mit dem Halbmesser OE beschriebenen Kugel ansehen können. Da nun die Grundfläche des letzteren pyramidalen Körpers nach §. 159 $EJKL = \varrho^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$ und die Höhe desselben $OE = \varrho$ ist; so hat man für dessen Inhalt

$$dM = \tfrac{1}{3}\varrho^3 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi \qquad \ldots\ (29)$$

Will man also einen Theil des gegebenen Körpers bestimmen, welcher zwischen zwei durch OX gehenden Ebenen liegt, die sich unter den Winkeln ψ_1 und ψ_2 gegen die Ebene XY neigen, und welcher außerdem durch zwei auf der Oberfläche des Körpers liegende Kurven oder vielmehr durch zwei Flächen begränzt ist, in denen man vom Punkte O aus lauter gerade Linien ziehen kann, für welche man resp.

$$\varphi' = F_1(\psi) \qquad \ldots\ (30)$$

und

$$\varphi'' = F_2(\psi) \qquad \ldots\ (31)$$

hat; so folgt aus der obigen Differenzialgleichung für das Volum dieses Körpertheiles

$$M = \tfrac{1}{3}\int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \int_{\varphi'}^{\varphi''} \varrho^3 \sin\varphi\, d\varphi \qquad \ldots\ (32)$$

Es ist $\varphi' = 0$, $\varphi'' = \pi$, $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 2\pi$ zu setzen, wenn der Pol O im Innern des Körpers liegt und man das ganze Volum desselben bestimmen will.

Soll dagegen ein Theil des Körpers dargestellt werden, welcher zwischen Kegelflächen liegt, deren Axe OX ist und deren Seitenlinien sich gegen diese Axe resp. unter den Winkeln φ_1 und φ_2 neigen, und welcher andererseits durch zwei Flächen begränzt ist, in denen sich vom Nullpunkte aus lauter gerade Linien ziehen lassen, für welche man resp.

$$\psi' = F_1(\varphi) \qquad \ldots . \quad (33)$$

und

$$\psi'' = F_2(\varphi) \qquad \ldots . \quad (34)$$

hat; so geschieht Dies offenbar durch die Formel

$$M = \tfrac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi \, d\varphi \int_{\psi'}^{\psi''} \varrho^3 \, d\psi, \qquad \ldots . \quad (35)$$

worin man $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $\psi' = 0$, $\psi'' = 2\pi$ zu setzen hat, wenn der Pol 0 im Inneren des Körpers liegt und man das ganze Volum des vorliegenden Körpers bestimmen will.

Sobald der Körper durch die Umdrehung einer ebenen Figur, für deren Begränzung man

$$\varrho' = F(\varphi) \qquad \ldots . \quad (36)$$

hat, um die Axe OX entstanden ist, wird man auch für einen jeden Punkt der Oberfläche dieses Körpers

$$\varrho = \varrho' = F(\varphi)$$

haben, ein Ausdruck, der von ψ unabhängig ist. Substituirt man denselben in die Formel (35); so erhält man, wenn man gleichzeitig $\psi'' = 2\pi$ und $\psi' = 0$, also $\int_{\psi'}^{\psi''} d\psi = \psi'' - \psi' = 2\pi$ setzt,

$$M = \frac{2\pi}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^3 \sin\varphi \, d\varphi \qquad \ldots . \quad (36)$$

für einen Ausschnitt des in Rede stehenden Umwälzungskörpers, welcher zwischen zwei Kegelflächen liegt, deren Seitenlinien sich resp. unter den Winkeln φ_1 und φ_2 gegen ihre gemeinschaftliche Axe OX neigen.

Das Volum der Kugel ergibt sich aus der letzteren Formel leicht, wenn man darin $\varrho = r$, $\varphi_2 = \pi$ und $\varphi_1 = 0$ setzt. Man erhält für dasselbe, da $\int \sin\varphi \, d\varphi = \text{const.} - \cos\varphi$ ist,

$$M = \frac{2\pi}{3} r^3 (-\cos\pi + \cos 0) = \tfrac{4}{3} \pi r^3,$$

wie in §. 165.

§. 167. Begriff der Richtung an den körperlichen Raumgrößen.

Das Wesen aller räumlichen Größen besteht in einer Erstreckung nach gewissen Dimensionen des absoluten Raumes. Die Größe dieser Erstreckung oder Ausdehnung, geschätzt nach der bloßen Vielheit ihrer Theile, bildet die Quantität der fraglichen Raumgröße; durch die Lage der Dimensionen des absoluten Raumes, nach welchen jene Erstreckung stattfindet, ist die Richtung derselben bestimmt. So bildete bei den Linien oder bei denjenigen Raumgrößen, welche sich nur nach einer einzigen Dimension erstrecken, die Länge ihre Quantität und die Lage dieser einzigen Dimension im Raume ihre Richtung. Da es im absoluten Raum ein unendliche Menge verschiedener Lagen gibt, welche eine solche Dimension annehmen kann, so mußte es auch eine ebenso große Anzahl von Linie geben, welche ihrer Richtung nach verschieden sind und sich durch die Methoden des zweiten bis vierten Abschnittes auf irgend drei rechtwinklige Axen beziehen lassen, welche resp. die primäre, sekundäre und tertiäre Axe bildeten. Bei den Flächen, deren Grundcharakter gleichzeitige Erstreckung nach zwei rechtwinkligen Dimensionen ist, bildete die Flächenausdehnung ihre Quantität, und ihre Richtung war durch die besondere Lage jener beiden Dimensionen im Raume oder durch die Lage der durch beide gelegten Ebene bestimmt. Da alle in derselben Ebene, oder genauer, auf derselben Seite Ein und derselben Ebene liegend gedachten Flächen sich gleichzeitig nach jeden zwei beliebigen Dimensionen jener Ebene erstrecken, oder durch die Bewegung der Einen Dimension in der Richtung der anderen erzeugt gedacht werden können; so wurde durch eine gleichzeitige Veränderung jener beiden Dimensionen einer Fläche innerhalb ihrer Ebene keine Verschiedenheit der Richtung derselben bewirkt; eine solche war zwischen zwei Flächen nur dann vorhanden, wenn dieselben durchaus nicht durch die Bewegung irgend einer einzigen Dimension in der Richtung einer anderen gleichfalls für beide Flächen gleichen Dimension beschrieben werden konnten. Da sich ferner zwei Ebenen immer in einer geraden Linie durchschneiden; so mußten zwei beliebige ebene Flächen auch immer Eine Dimension gemeinschaftlich besitzen, und

die erwähnte Richtungsverschiedenheit sprach sich darin aus, daß dieselben neben einer gemeinschaftlichen ersten Dimension zwei verschiedene zweite Dimensionen besaßen; umgekehrt folgte aber auch, daß zwei verschiedene Ebenen im Raume nicht mehr als Eine gerade Linie gemein haben, sich also nicht nach eben denselben zwei Dimensionen erstrecken konnten, mithin der Richtung nach verschieden sein mußten. Weil endlich die Richtung einer Ebene durch die Richtung einer auf ihr errichteten, nach Einer Seite verlängerten Normalen unzweideutig bestimmt ist, und sich mit der Richtung dieser Normale ändert; so zeigte es sich, daß es eine ebenso große Verschiedenheit zwischen den Richtungen der ebenen Flächen, wie zwischen denen der geraden Linien, gab, und daß man die Ersteren in ähnlicher Weise, wie die Letzteren, durch die Methoden des fünften Abschnittes auf die Lage dreier fester Ebenen beziehen konnte, welche resp. aufeinander perpendikular standen und die primäre, sekundäre, tertiäre Ebene bildeten.

Bei den Körpern, als denjenigen Raumgrößen, welche sich gleichzeitig nach drei rechtwinkligen Dimensionen des Raumes erstrecken, fallen alle eben erwähnten Beziehungen hinsichtlich der Richtungsverschiedenheit hinweg. Durch irgend drei solcher Dimensionen ist jede körperlich räumliche Ausdehnung vollkommen bestimmt und entspricht gleichzeitig einer Ausdehnung nach jeden beliebigen anderen drei rechtwinkligen Dimensionen. Ein jeder Körper im Raume kann durch die Bewegungen der Elemente Ein und derselben Ebene in Ein und derselben Richtung gerade so erzeugt werden, wie Dies in §. 162 angenommen ist. Zwei Körper durchdringen sich auch wiederum in einem Körper, welcher denn doch gleichzeitig die Dimensionen der ersten beiden besitzen muß, ein Umstand, welcher sowenig bei den Linien, wie bei den Flächen stattfand, wo die Durchdringung resp. in einem Punkte und in einer Linie, also in räumlichen Größen geschah, die immer Eine Dimension weniger besaßen, als die sich durchdringenden Größen selbst, und mithin auf die Verschiedenheit der Richtungen der Letzteren schließen ließen.

Von den körperlichen Volumen kann man also nur sagen, daß sie Quantität, nicht aber, daß sie Richtung besitzen, weil die Letztere allen denkbaren Körpern gemein sein würde. Man hat hierbei wol die Richtungen der Oberflächen und der Kan-

ten jener Volumen von derjenigen Richtung zu unterscheiden, welche ein Ausdruck für die Art der Entstehung ihrer körperlichen Quantität durch gleichzeitige Expansion nach drei Dimensionen sein würde. Das eigentliche Wesen der zuletzt erwähnten Richtung, wie auch das der körperlichen Quantität selbst würde von der Beschaffenheit der Umgränzungen ganz unabhängig sein.

Wollte man dessenungeachtet den körperlichen Größen den Begriff der Richtung aufdringen; so kann Dies auf zwei Weisen geschehen. Entweder denkt man sich einen gewissen Körper dadurch entstanden, daß die unendlich kleinen quadratischen Flächenelemente irgend einer Ebene in der Richtung der Normalen fortrücken und so einen Körper herstellen, welcher aus einer unendlichen Menge unter sich paralleler Prismen von unendlich kleinen einander gleichen Querschnitten besteht, wie Dies näherungsweise bei einem materiellen Körper stattfinden würde, der aus einem Stück Holz von parallelen Fibern verfertigt wäre. Wenn dieser Körper in verschiedene Lagen des absoluten Raumes gebracht wird, wobei seine parallelen Fibern verschiedene Richtungen erhalten, kann man annehmen, daß sich auch seine Richtung geändert habe, indem man die Letztern nach der Richtung der erwähnten Fibern bemißt. Es leuchtet aber ein, wenn man sich sämmtliche Fibern in ihrer Längenrichtung aneinandergesetzt denkt, daß der in Rede stehende Körper wie eine einzige materielle Linie zu betrachten ist, deren absolute Länge die Quantität und deren Richtung die Richtung des Körpers darstellt, daß derselbe also unter diesem Gesichtspunkte genau der Theorie der Linien unterworfen werden kann, wie dieselbe im zweiten bis vierten Abschnitte vorgetragen ist.

Ferner könnte man sich auch vorstellen, die parallelen Streifen Ein und derselben Ebene, welche in der Einen Dimension sämmtlich unendlich klein und einander gleich wären und in der anderen verschiedene endliche Längen besäßen, rückten in der Richtung der gemeinschaftlichen Normalen fort, indem sie gleichzeitig ihre Längen änderten, und so einen Körper konstruirten, welcher aus einer unendlichen Menge paralleler Scheiben oder Blätter bestände. Nähme man nun die Richtung einer solchen Scheibenfläche für die Richtung des Körpers an; so ließen sich die verschiedenen Lagen desselben, besonders wenn man sich alle Schei-

ben in Ein und derſelben ebenen Fläche ausgebreitet dächte, deren Flächeninhalt alsdann gleichzeitig das Volum des Körpers repräſentiren würde, nach der im fünften Abſchnitte entwickelten Theorie der Flächen betrachten.

Den körperlichen Größen des abſoluten Raumes, ſobald ſie nur nach dem einfachen Merkmale der Ausdehnung betrachtet werden, iſt eine ſolche innere Struktur in den ebenerwähnten Weiſen vollkommen fremd; es gibt jedoch Fälle aus der Anwendung auf Größen der Wirklichkeit, wo man es mit körperlichen Volumen zu thun hat, deren Entſtehung nothwendig unter der Wirkung des Einen oder des andern der beiden vorſtehenden Bildungsgeſetze gedacht werden muß, weil ihnen eine beſondere Bedingung das Prinzip der Richtung in einer ſolchen Weiſe auferlegt. Hierzu gehört unter Anderem das in §. 61—63 diskutirte Beiſpiel über die Anzahl der Kugeln, welche eine gewiſſe Perſon aus einer Urne ziehen ſoll. Es handelt ſich hier nicht bloß um eine gewiſſe Anzahl von Kugeln oder um ein gewiſſes körperliches Volum, deſſen Quantität durch die Maſſe der fraglichen Kugeln dargeſtellt wird. Dieſe Kugeln ſollen vielmehr aus der Urne gezogen, und zwar durch eine beſtimmte Perſon A, und durch keine andere gezogen ſein, was dem Falle entſpricht, daß ein körperliches Volum in einer beſtimmten gegebenen Richtung des abſoluten Raumes und in keiner anderen gebildet ſei. Da unter dieſen Umſtänden das in Rede ſtehende Volum ſowol ſeiner Quantität, wie ſeiner Richtung nach durch eine gerade Linie, oder auch, wenn man gewollt hätte, durch eine ebene Figur dargeſtellt werden kann; ſo hat man in §. 63 geſehen, wie die dortige Aufgabe unter ihrem allgemeinſten Geſichtspunkte in der Theorie der geraden Linie ihre geometriſche Repräſentantin findet.